MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ion Achiri Andrei Braicov Olga Șpuntenco

Matematică

Manual pentru clasa a VIII-a

8

EDITURA PRUT

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ion Achiri
Andrei Braicov
Olga Șpuntenco

Matematică

Manual pentru clasa a VIII-a

EDITURA
PRUT

Manualul şcolar a fost elaborat în conformitate cu prevederile Curriculumului la disciplină, aprobat prin Ordinul ministrului educației şi cercetării nr. 906 din 17 iulie 2019. Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului educației şi cercetării nr. 415 din 27 aprilie 2023 ca urmare a evaluării calității metodico-ştiințifice.

(Denumirea instituției de învățământ)

EVIDENȚA UTILIZĂRII MANUALULUI:

Anul de folosire	Numele şi prenumele elevului	Anul de studii	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

- Dirigintele verifică dacă numele şi prenumele elevului sunt scrise corect.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări în manual.
- Aspectul manualului (la primire şi la returnare) se va aprecia cu unul dintre următoarele calificative: *nou*, *bun*, *satisfăcător*, *nesatisfăcător*.

Autori: Ion Achiri, doctor, conferențiar universitar, UPS „Ion Creangă” din Chişinău
Andrei Braicov, doctor, conferențiar universitar, UPS „Ion Creangă” din Chişinău
Olga Şpuntenco, profesoară, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Gaudeamus”, Chişinău

Redactor: Vitalie Puțuntică
Corector: Fulga Poiată
Copertă: Irina Cuzin, Sergiu Stanciu
Machetare computerizată: Valentina Stratu

Editura Prut Internațional, str. Alba Iulia, nr. 23, bl. 1 A, Chişinău, MD-2051
Tel.: (+373 22) 75 18 74; (+373 22) 74 93 18
www.edituraprut.md; e-mail: office@prut.ro

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

Achiri, Ion

Matematică: Manual pentru clasa a 8-a / Ion Achiri, Andrei Braicov, Olga Şpuntenco; Ministerul Educației şi Cercetării al Republicii Moldova. – [Chişinău]: Prut Internațional, 2023 (UNISOFT, Ucraina). – 176 p.: il.

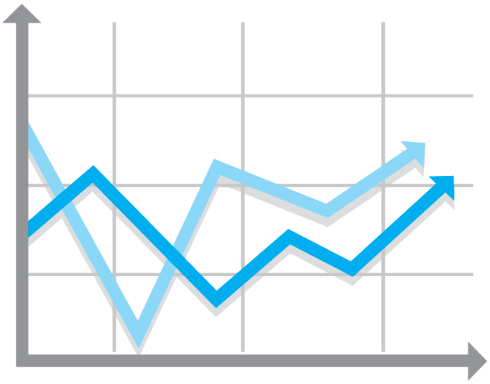
ISBN 978-9975-54-729-1

51(075.3)
A 16

Imprimat la Tipografia UNISOFT

ALGEBRĂ

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$



$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Capitolul 1 Numere reale. Recapitulare și completări

> *Nimic nu se învață decât învățând!*
> J.A. Comenius

§1. Mulțimea numerelor reale și submulțimi ale ei

1.1. Numere reale. Forme de reprezentare

Ne amintim

1 Selectați numerele care se potrivesc cutiei ①, apoi, din cele rămase, selectați numerele care se potrivesc cutiei ②. Din numerele rămase, selectați numerele potrivite cutiei ③. Corespund cutiei ④ numerele neselectate?

- De ce pentru cutia ⑤ n-au mai rămas numere?
- Cum se numesc numerele care nu sunt raționale?

$\sqrt{9}$ $\frac{\sqrt{11}}{11}$ 0 $7\sqrt{2}$ $6\frac{1}{3}$ -2 $-\frac{1}{9}$

$4{,}1(8)$ $9,(2)$ $-\frac{1}{8}$ $\sqrt{3}$ $0{,}123\ldots$ $-2\sqrt{7}$

$-3\sqrt{3}$ 10 $\frac{2}{5}$ -74 3 216

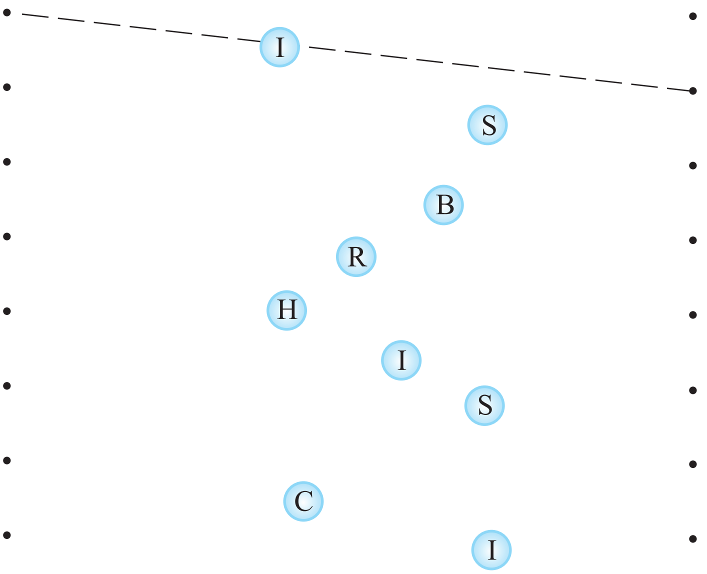
- Vom obține același rezultat dacă vom selecta mai întâi numerele care se potrivesc cutiei ⑤? De ce?
- În ce ordine trebuie selectate numerele, astfel încât cutiile ① și ③ să rămână goale?
- Care dintre numerele date au perioadă simplă? Dar perioadă mixtă?

Generalizăm

- Un număr real este rațional sau este irațional.
- Un număr rațional poate fi scris sub forma $\frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- Un număr irațional nu poate fi scris sub formă de fracție.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

2 Stabiliți corespondențe. Folosind rigla, aflați ce literă va intersecta fiecare segment-corespondență. Descoperiți pe verticală numele unui ilustru matematician din Republica Moldova, care a activat în secolul al XX-lea.

Mulțimea numerelor:



- $\mathbb{Z}^*$
- $\mathbb{R}_-$
- $\mathbb{Q}_+^*$
- $\mathbb{R}_-^*$
- $\mathbb{Z}_-$
- $\mathbb{N}^*$
- $\mathbb{I}_-$
- $\mathbb{R}_+$
- $\mathbb{Q}_-$

- naturale nenule ☐
- întregi nenule I
- întregi nepozitive ☐
- raționale nepozitive ☐
- raționale pozitive ☐
- iraționale negative ☐
- reale nenegative ☐
- reale nepozitive ☐
- reale negative ☐

Generalizăm

Fie M o mulțime de numere. Se notează: $M^* = M \setminus \{0\}$;

M_+ – mulțimea numerelor nenegative din M;

M_+^* – mulțimea numerelor pozitive din M;

M_- – mulțimea numerelor nepozitive din M;

M_-^* – mulțimea numerelor negative din M.

3 Observați modelul și scrieți sub formă zecimală numerele reprezentate sub formă de fracție. Scrieți celelalte numere (dacă este posibil) sub formă de fracție:

a) $1\frac{2}{9}$; $-\frac{12}{13}$; $4{,}8$; $6{,}(7)$; $-5{,}1(4)$; $\sqrt{8}$; $1{,}1234\ldots$;

b) $\frac{4}{7}$; $-1\frac{3}{4}$; $5{,}7$; $0{,}1(234)$; $-\sqrt{2}$; $3{,}5(1)$; $2{,}122333\ldots$

Model:

- $2\frac{3}{5} = \frac{2\cdot 5+3}{5} = \frac{13}{5} = 13:5 = 2{,}6;$
- $-\frac{4}{11} = -0{,}3636\ldots = -0{,}(36);$
- $3{,}7 = 3\frac{7}{10};$
- $8{,}(15) = 8\frac{15}{99} = 8\frac{5}{33};$
- $6{,}9(23) = 6\frac{923-9}{990} = 6\frac{914}{990} = 6\frac{457}{495}.$

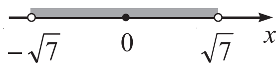
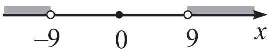
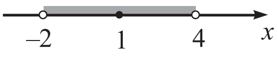
Generalizăm

Cum orice număr real este rațional sau irațional, el poate fi reprezentat:
- ca număr zecimal cu un număr finit de zecimale sau ca
- număr zecimal cu un număr infinit de zecimale, cu perioadă simplă, sau ca
- număr zecimal cu un număr infinit de zecimale, cu perioadă mixtă, sau ca
- număr zecimal neperiodic cu un număr infinit de zecimale.

Numere zecimale
- cu un număr finit de zecimale (sau cu un număr infinit de zerouri)
  - 0,1; –0,21; 14,25; –7,5000...
- cu un număr infinit de zecimale
  - periodice (cu perioada diferită de 0)
    - simple: 0,(3); −6,(12)
    - mixte: 4,6(7); −0,1(51)
  - neperiodice: $\pi = 3{,}1415...$; 0,112113114...

1.2. Modulul unui număr real. Proprietăți

1 Observați și completați:

Mulțimea M a numerelor reale x	Reprezentarea mulțimii M pe axa numerelor	Distanțele dintre punctele de coordonata x și	Obținerea formei reprezentării analitice a mulțimii M
mai mici decât $\sqrt{7}$ și mai mari decât $-\sqrt{7}$		originea axei sunt mai mici decât $\sqrt{7}$	$-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$ $M = \{x \mid \lvert x \rvert < \sqrt{7}\}$
mai mari decât 9 sau mai mici decât –9		originea axei sunt mai □ decât 9	$x > 9$ sau $x < -9$ $M = \{x \mid \lvert x \rvert > \square\}$
?		punctul de coordonata 1 sunt mai mici decât 3	$-2 < x < 4$ $-2-1 < x-1 < 4-1$ $-3 < x-1 < 3$ $M = \{x \mid \lvert x-1 \rvert < \square\}$
mai mari decât 3 sau mai mici decât –7	?	punctul de coordonata −2 sunt mai mari decât 5	$x > 3$ sau $x < -7$ ➡ $x-(-2) > 3-(-2)$ sau $x-(-2) < -7-(-2)$ ➡ $x+2 > \square$ sau $x+2 < \square$ $M = \{x \mid \lvert x+2 \rvert > \square\}$

Fie a un număr real.

Definiție

Modulul numărului real *a* (sau **valoarea absolută** a numărului a) se notează prin $|a|$ și se definește astfel: $|a| = \begin{cases} a, \text{ dacă } a > 0 \\ 0, \text{ dacă } a = 0 \\ -a, \text{ dacă } a < 0. \end{cases}$

- Distanța de la punctul $A(a)$ până la originea axei numerelor este egală cu $|a|$.

Proprietăți ale modulului

Pentru orice numere reale a și b:

1° $|a| \geq 0$;

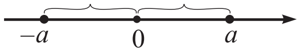
2° $|a| \geq a$;

3° $|a^2| = |a|^2 = a^2$;

4° $|ab| = |a| \cdot |b|$;

5° $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$

- Numerele a și $-a$ se numesc **numere opuse**.



2 Explicitați modulul, selectând expresia potrivită din parantezele pătrate:

a) $|\sqrt{3} - 5| = [\sqrt{3} - 5 \text{ sau } 5 - \sqrt{3}]$;

b) $|\sqrt{0,1} - 0,1| = [\sqrt{0,1} - 0,1 \text{ sau } 0,1 - \sqrt{0,1}]$;

c) $|x - 2| = [x - 2 \text{ sau } 2 - x]$ pentru $x < 2$;

d) $|4 - x| = [4 - x \text{ sau } x - 4]$ pentru $x > 4$.

Aplicați proprietatea 1°.

1.3. Compararea numerelor reale

1 Comparați numerele a și b, dacă:

a) $a, b \in \mathbb{R}_+$ și $|a| > |b|$;

b) $a, b \in \mathbb{R}_-$ și $|a| > |b|$;

c) $a \in \mathbb{R}_-$, $b \in \mathbb{R}_+$ și $|a| > |b|$;

d) $a \in \mathbb{R}_-$, $b \in \mathbb{R}_+$ și $|a| > |b|$;

e) numărul a reprezentat pe axa numerelor se află la dreapta numărului b.

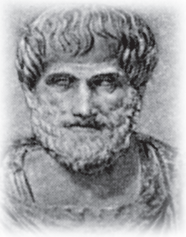
Generalizăm

Fie a și b două numere reale.

Dacă:	atunci
a) numărul a se află pe axa numerelor la stânga numărului b, b) numerele a și b sunt pozitive și $\lvert a\rvert < \lvert b\rvert$, c) numerele a și b sunt negative și $\lvert a\rvert > \lvert b\rvert$, d) numărul a este negativ, iar b – nenegativ,	$a < b$.

2 Ordonați crescător numerele și veți afla numele unui filosof ilustru din Antichitate.

T	L	S	R	T	A	O	I	E
$-\frac{1}{4}$	1,4	–1,43	–1,443	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	–1,(4)	–0,4	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}$



Exerciții și probleme

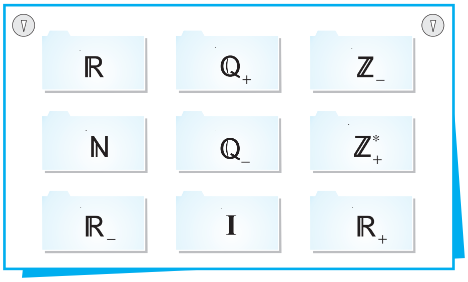
1

1. În care buzunăraş poate fi amplasat numărul:

$88;\ -3,(6);\ 5\frac{1}{6};\ -\sqrt{7};\ \sqrt{11};\ 0;$

$-2008;\ 17,25;\ -2,7;\ 3\sqrt{41};\ \sqrt{9};$

$-\sqrt{25};\ 1,2(4)?$



2. *Investigați!* *Adevărat* sau *Fals*?

a) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}$; b) $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{I}_-$; c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}_-$; d) $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$;

e) $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+$; f) $\mathbb{Q}_- \not\subset \mathbb{R}$; g) $\mathbb{Z}_+^* \subset \mathbb{Z}$; h) $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}_+$.

3. Completați adecvat:

a) ☐ $\in \mathbb{N}$; b) ☐ $\in \mathbb{Z}_+$; c) ☐ $\in \mathbb{R}_-$; d) ☐ $\in \mathbf{I}_+$;

e) ☐ $\in \mathbb{Q}_-^*$; f) ☐ $\in \mathbb{R}_+^*$; g) ☐ $\in \mathbb{Z}^*$; h) ☐ $\in \mathbb{R}^*$.

4. *Lucrați în perechi!* Care produs este mai ieftin?

Cursul valutar	
1 \$	19,40 lei
1 €	20,50 lei
1 RON	4,20 lei
1 UAH	0,52 lei

a)

b)

c)

d)

5. *Investigați!* *Adevărat* sau *Fals*?

a) $\sqrt{15} > 1 + \sqrt{14}$; b) $3 - \sqrt{2} > \sqrt{7}$; c) $\sqrt{121} < 11$;

d) $\sqrt{400} > 20$; e) $\sqrt{17} < \sqrt{25}$; f) $\sqrt{625} = 25$.

Indicație. Utilizați calculatorul de buzunar.

6. Reprezentați pe axă numărul real *a* şi opusul său, dacă *a* este egal cu:

a) $2,5$; b) $-3\frac{1}{4}$; c) $\sqrt{9}$; d) $\sqrt{11}$; e) $-\sqrt{26}$; f) $5,(6)$.

7. Aflați modulul numărului:

a) $-7\frac{4}{5}$; b) $\sqrt{36}$; c) $18,3(56)$; d) $-5,48$; e) $8\frac{1}{3}$; f) $\sqrt{22}$.

8. Ordonați crescător numerele:

$\sqrt{9};\ |-6,(2)|;\ -\sqrt{20};\ 3,27;\ -4,5;\ |4,28|;\ 7;\ -1.$

9. Ordonați descrescător numerele:

$|-3,5|;\ \sqrt{15};\ -3,6;\ |\sqrt{16}|;\ -\frac{21}{6};\ 12;\ -5\frac{4}{5};\ 2,(46).$

☐ **2** ☐

10. ***Lucrați în perechi!*** Completați adecvat:

a) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z} =$ ☐; b) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_- =$ ☐;

c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{I}_+ =$ ☐; d) $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- =$ ☐;

e) $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{N} =$ ☐; f) $\mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+ =$ ☐.

11. Scrieți numerele opuse care se află pe axă unul față de altul la distanța de:

a) $3\frac{1}{2}$; b) $2\sqrt{14}$; c) $6,(4)$; d) $4+\sqrt{10}$.

12. Explicitați modulul:

a) $|\sqrt{19}-4|$; b) $|2-\sqrt{10}|$;

c) $|\sqrt{7}-2\sqrt{2}|$; d) $|\sqrt{22}-3\sqrt{2}|$.

13. ***Lucrați în perechi!***

Explicitați modulul:

a) $|x-2|$; b) $|1-x|$;

c) $|3x-6|$; d) $|10-5x|$.

Model:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$$

14. Calculați:

a) $|\sqrt{5}\cdot(6-8,15)| + |(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2| - \left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{5-6,5}\right|$;

b) $|(3-2\sqrt{2})^2| - |(\sqrt{2}\cdot(8-12,44)| + \left|\dfrac{\sqrt{2}-5}{2-3,(6)}\right|$.

15. 1) Reprezentați pe axă numerele reale:

a) mai mari decât $-1\frac{2}{5}$ și mai mici decât $\sqrt{4}$;

b) mai mici decât $-\sqrt{9}$ sau mai mari decât $\sqrt{9}$;

c) cuprinse între $-6,5$ și $\sqrt{10}$;

d) cuprinse între $-\sqrt{23}$ și $\sqrt{23}$;

e) mai mici decât $\sqrt{25}$ și mai mari decât -2;

f) mai mari decât $\sqrt{5}$ sau mai mici decât $\sqrt{2}$.

2) Scrieți analitic mulțimile numerelor exercițiilor a)–f).

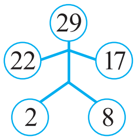
16. ***Investigați!*** Comparați: a) 20 \$ ○ 15 €; b) 12 RON ○ 6 \$;

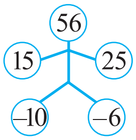
c) 250 UAH ○ 150 \$; d) 25,5 € ○ 810 RON.

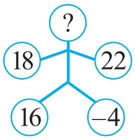
Cursul valutar

1 \$	19,40 lei
1 €	20,50 lei
1 RON	4,20 lei
1 UAH	0,52 lei

17. ***Lucrați în perechi!*** Determinați numărul care lipsește.







☐ ☐ **3**

18. Demonstrați identitatea, utilizând proprietățile radicalilor:

a) $\sqrt{t^4+2t^2+1} = t^2+1$; b) $\sqrt{x^2+2|x|+1} = |x|+1$.

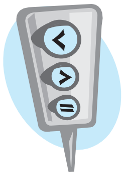
19. Construiți cu rigla și compasul pe caiet un segment cu lungimea de:

a) $\sqrt{10}$ cm; b) $\sqrt{8}$ cm; c) $\sqrt{6,5}$ cm; d) $\sqrt{2,5}$ cm.

20. ***Investigați!*** Comparați, utilizând formulele de calcul prescurtat modulul:

a) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ ○ $\sqrt{2}-1$; b) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ ○ $\sqrt{3}-\sqrt{5}$;

c) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$ ○ $\sqrt{7}+1$; d) $\sqrt{12-4\sqrt{5}}$ ○ $\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

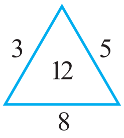


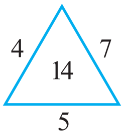
21. Aflați valorile întregi ale variabilelor *a* și *b*, astfel încât $a^2+b^2-8a+10b+41=0$.

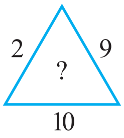
Indicație. Aplicați formulele $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ și $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$.

24. ***Lucrați în perechi!***

Determinați numărul care lipsește.

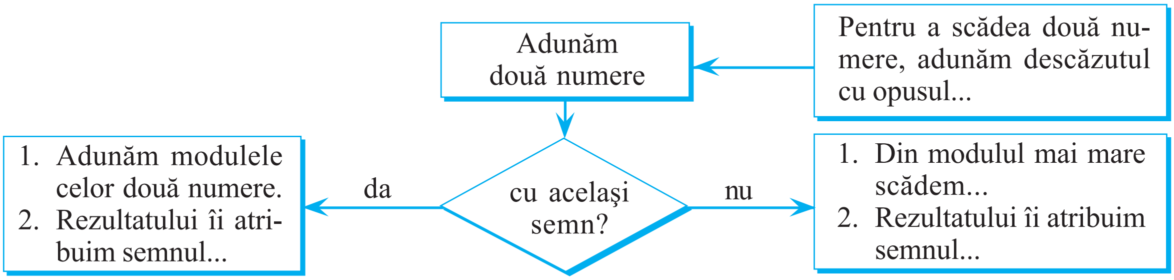


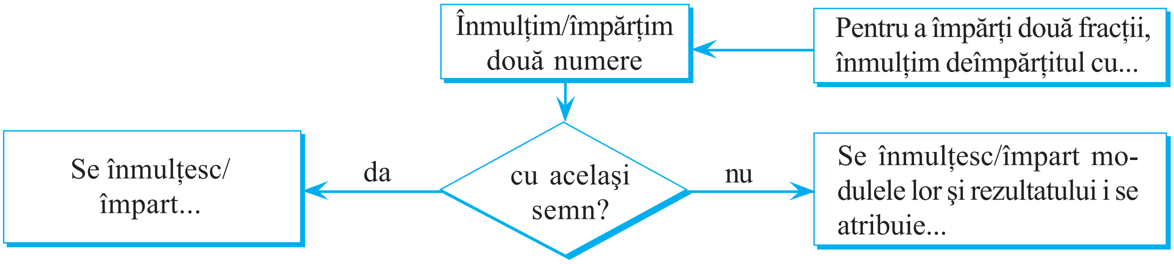




§2. Operații cu numere reale

1 Completați adecvat schemele:





• Calculați, rotunjind până la sutimi, și numiți regula aplicată la efectuarea fiecărei operații aritmetice:

a) $-4{,}75+3{,}25+\sqrt{6}(2-\sqrt{6}):\left(-\frac{2}{3}\right);$

b) $3{,}5\cdot(-\sqrt{5})+8\sqrt{5}:2-3\sqrt{5}\cdot 2{,}(3).$

2 Completați astfel încât să obțineți ***proprietățile operațiilor aritmetice cu numere reale***.

Pentru orice numere reale a, b, c:

______ și ______ sunt operații **comutative**.	$a+b=b+a$ $a\cdot b=b\cdot a$
______ și ______ sunt operații **asociative**.	$a+(b+c)=(a+b)+c$ $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Pentru operația de ______ 0 este **element neutru**.	$a+0=0+a=a$
Pentru operația de ______ 1 este **element neutru**.	$a\cdot 1=1\cdot a=a$
Fiecare număr real a are un unic ______, $-a$.	$a+(-a)=(-a)+a=0$
Fiecare număr real nenul a are un unic ______, $\frac{1}{a}$.	$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1,\ a\neq 0.$
Înmulțirea este ______ față de adunare și față de scădere.	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ $a\cdot(b-c)=ab-ac$

3 Poate suma a două numere iraționale să fie un număr rațional? Dar diferența? Produsul? Câtul?

Examinați și completați!

Numărul irațional *a*	Numărul irațional *b*	Rezultatul operației aritmetice
$4-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	Suma numerelor *a* și *b*: $(4-\sqrt{3})+\sqrt{3}=4\in\mathbb{Q}$;
$4-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	Diferența numerelor *a* și *b*: $(4-\sqrt{3})-(-\sqrt{3})=\boxed{}$;
$4-\sqrt{3}$	$4+\sqrt{3}$	Produsul numerelor *a* și *b*: $(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=4^2-(\sqrt{3})^2=\boxed{}$;
$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	Câtul numerelor *a* și *b*: $2\sqrt{3}:\sqrt{3}=\boxed{}$.

Răspuns: $\boxed{}$.

4 Stabiliți ordinea efectuării operațiilor și calculați valoarea expresiei:

$$\sqrt{15}\overset{\bigcirc}{-}[7\sqrt{3}\overset{⑤}{\cdot}(-5\sqrt{5})\overset{\bigcirc}{+}\overset{③}{5^2}\overset{\bigcirc}{\cdot}(7\sqrt{15}\overset{\bigcirc}{-}\sqrt{5}\overset{①}{\cdot}9\sqrt{3})]\overset{⑦}{:}57.$$

Rezolvăm

① $\sqrt{5}\cdot 9\sqrt{3}=9\sqrt{15}$;

② $7\sqrt{15}-9\sqrt{15}=\boxed{}$;

③ $5^2=\boxed{}$;

④ $\boxed{}\cdot\boxed{}=\boxed{}$;

⑤ $7\sqrt{3}\cdot(-5\sqrt{5})=\boxed{}$;

⑥ $\boxed{}+\boxed{}=\boxed{}$;

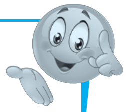
⑦ $\boxed{}:\boxed{}=\boxed{}$;

⑧ $\sqrt{15}-\boxed{}=\boxed{}$.

Ne amintim

Ordinea efectuării operațiilor

1. Operațiile din paranteze (interioare, apoi exterioare).
2. Ridicarea la putere, extragerea rădăcinii pătrate.
3. Înmulțirea și împărțirea.
4. Adunarea și scăderea.



Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Tata a cumpărat de la piață 3 kg de cartofi la prețul de 4,5 lei/kg, 1 kg de morcovi la prețul de 7,3 lei, 2,5 kg de sfeclă la prețul de 5,2 lei/kg şi un pepene verde de 4,5 kg la prețul de 5,5 lei/kg. Au fost suficienți 60 de lei pentru a achita cumpărăturile? Au mai rămas bani? Câți?

2. Fie numerele:

a) 0,225; b) 642; c) 1035;
d) 705; e) 208; f) 350;
g) 14,4; h) 2013.

Indicați care dintre aceste numere:

1) sunt divizibile cu 2;
2) sunt divizibile cu 2 şi cu 5;
3) sunt divizibile cu 3;
4) sunt divizibile cu 9;
5) sunt divizibile cu 2 şi cu 3;
6) sunt divizibile cu 3 şi cu 9.

3. *Lucrați în perechi!* Calculați, aflând cel mai mare divizor comun al numitorilor fracțiilor:

a) $\frac{25}{336}+\frac{2}{135}$; b) $\frac{3}{345}-\frac{7}{546}$; c) $\frac{1}{2013}+\frac{1}{2016}$.

4. Se dau numerele 108 şi 54.

a) Aflați D_{108}, D_{54}.
b) Scrieți câte cinci elemente ale mulțimilor M_{108}, M_{54}.
c) Aflați c.m.m.d.c. al numerelor 108 şi 54.
d) Determinați c.m.m.m.c. al numerelor 108 şi 54.

5. Calculați:

a) $3{,}75-2:0{,}25+1{,}4\cdot 3{,}55+1{,}2^3$;
b) $6{,}24:0{,}4+7{,}65\cdot 20-1000\cdot 0{,}01\cdot 5^2$;
c) $3\frac{1}{4}\cdot 2\frac{5}{8}-15\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}+6,(2)\cdot\frac{9}{23}-11^2\cdot 10^2$;
d) $4{,}1(15)\cdot 99-13,(12)\cdot 100^2+16{,}0(21)\cdot 10000$.

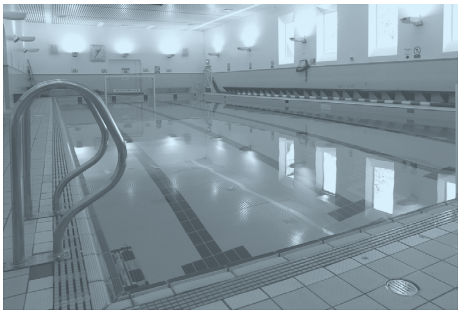
6. Calculați media aritmetică a numerelor reale a şi b, dacă:

a) $a=1{,}25:0{,}05-2\sqrt{7}\cdot(-2{,}5-4{,}8)$,
$b=5\sqrt{7}\cdot(-2{,}4)+6{,}24:(0{,}04-0{,}24)$;
b) $a=3\sqrt{5}[4,(2)-1{,}44\cdot 0{,}05]+\left(-3\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{5}{8}\right)$,
$b=3,(25)-4[-2{,}1(15)-7:(-33)]+7\sqrt{5}$.

7. Aflați numerele întregi consecutive între care este cuprins numărul real:

a) $-3+\sqrt{7}$; b) $1+\sqrt{6}$;
c) $(-1{,}5)\cdot(-\sqrt{14})$; d) $-7,(2)\cdot\sqrt{10}$.

8. *Lucrați în perechi!* Măsurați lățimea şi lungimea suprafeței băncii şi calculați câți metri pătrați de hârtie sunt necesari pentru a o acoperi.



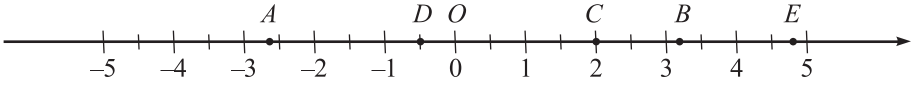
9. O piscină are dimensiunile de 10,5 m × 25 m × 3,2 m. De câte plăci de faianță este nevoie pentru a acoperi pereții şi fundul piscinei, dacă o placă de faianță are dimensiunile de 25 cm şi 40 cm?

10. Scrieți opusul, apoi inversul numărului:

a) $-\frac{2}{5}$; b) $2\frac{1}{4}$; c) $\sqrt{7}$;
d) $-2\sqrt{26}$; e) 2023; f) –0,4.

☐ **2** ☐

11. Aflați coordonatele punctelor A, B, C, D, E din desen, rotunjite până la zecimi.



12. ***Lucrați în perechi!*** Scrieți numărul 7 ca produs de două: a) numere întregi;
b) numere raționale;
c) numere iraționale egale;
d) numere iraționale diferite.

13. Aria suprafeței Pământului este de 510,1 milioane km², dintre care 149,2 milioane km² reprezintă uscatul.

a) Aflați aria suprafeței Pământului acoperită cu apă. Exprimați rezultatul în metri pătrați.

b) Ce procent din toată suprafața Pământului reprezintă apa? Dar uscatul?

14. Masa Pământului este de $5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg. Aflați masa Planetei Venus, dacă ea constituie $\frac{4}{5}$ din masa Pământului.

15. Anual, populația de pe Terra crește în medie cu 2%.
a) Câți locuitori vor fi pe glob în anul 2050, dacă în 1990 populația Terrei a constituit 5,2 miliarde?
b) Câți locuitori vor fi pe Terra în 2025?

16. Rezolvați problema, rotunjind răspunsul până la întregi.

Sergiu are 9 ani. Vârsta fiecăreia dintre surorile lui gemene, Alisia și Amelia, constituie 22% din vârsta lui Sergiu, iar vârsta verișorului său Maxim constituie 30% din vârsta acestuia. Aflați peste câți ani suma vârstelor tuturor copiilor va fi egală cu 100 de ani.

17. Scrieți ca sumă de două numere iraționale numărul:
a) 5; b) –3; c) 8,5; d) $3\sqrt{15}$; e) 0; f) $\frac{1}{4}$.

18. ***Lucrați în perechi!***
Completați tabelul și trageți concluzii.

a	b	c	ab	ba	$a(bc)$	$(ab)c$	$a \cdot 1$	$b \cdot (-1)$	$\frac{1}{c}$	$c \cdot \frac{1}{c}$
–4	2,5	10								
$1\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{9}{15}$								
$\sqrt{2}$	–5	1,2								
0	$\sqrt{11}$	$-\sqrt{30}$								
$-\pi$	$\sqrt{7}$	2								

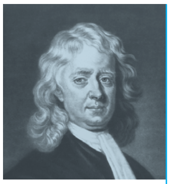
☐ ☐ **3**

19. Demonstrați egalitatea:
a) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$; b) $\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{5}+\sqrt{2}$.

20. Demonstrați că valoarea expresiei este un număr natural:
a) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$; b) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}}$.

21. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:
a) $\sqrt{2x-3} + |1{,}5y - x| + (z+2\sqrt{5})^2 = 0$;
b) $x^2 - 6x + y - 8\sqrt{y} + 25 = 0$.

22. ***Problema lui Newton***



Isaac Newton
(1642–1727)

În fiecare an, un negustor cheltuiește 100 de lire pentru întreținerea familiei sale, apoi își sporește averea cu o treime. După trei ani, constată că și-a dublat avuția.
Câți bani a avut negustorul la început?

23. Demonstrați identitatea:

$$\sqrt{t^2+2+2\sqrt{t^2+1}} - \sqrt{t^2+2-2\sqrt{t^2+1}} = 2.$$

24. ***Matematică distractivă***
Utilizând operațiile aritmetice și radicalul, cu ajutorul a 6 cifre de 4 obțineți numărul:
a) 0; b) 9;
c) 11; d) 25.

25. Completați pătratul cu cele mai mici numere prime, astfel încât el să devină magic, știind că suma numerelor de pe fiecare linie, coloană sau diagonală este 121.

67		
31		7

§3. Puteri

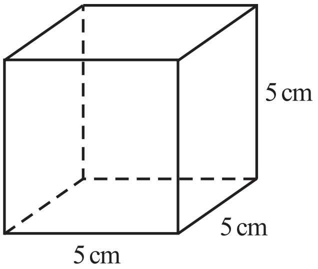
3.1. Puterea cu exponent natural

1 Examinaţi şi completaţi adecvat:

$\mathcal{V}_{\text{cub}} = 5\cdot 5\cdot 5 = 5^3 = 125\,(\text{cm}^3)$;

$\left(-\frac{1}{5}\right)^4 = \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = \square$;

$(\sqrt{2})^5 = \square\cdot\square\cdot\square\cdot\square\cdot\square = \square$.

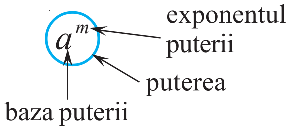


Definiţie

Puterea cu exponentul natural nenul m **a numărului real** a se numeşte produsul a m factori, fiecare egal cu a.

$a^m = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ \text{factori}}$,

$a\in\mathbb{R},\ m\in\mathbb{N}^*$.



$a^0 = 1,\ a\in\mathbb{R}^*$.

0^0 nu are sens.

Reţineţi

Regulile de calcul cu puteri cu exponent natural

Pentru orice $a, b\in\mathbb{R}^*$, $n, m\in\mathbb{N}$:	**Verificăm**
1°. $1^m = 1$	$1^3 = 1$
2°. $(-1)^{2m} = 1$	$(-1)^6 = 1$
3°. $(-1)^{2m+1} = -1$	$(-1)^{17} = -1$
4°. $a^n\cdot a^m = a^{n+m}$	$a^3\cdot a^2 = (a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a) = a^{3+2} = a^5$
5°. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},\ n\geq m$	$\frac{a^4}{a^2} = \frac{a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a} = a^{4-2} = a^{\square}$
6°. $(a\cdot b)^m = a^m\cdot b^m$	$(a\cdot b)^3 = (a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot(a\cdot b) = (a\cdot a\cdot a)\cdot(b\cdot b\cdot b) = a^{\square}\cdot b^{\square}$
7°. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$
8°. $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$	$(a^3)^2 = (a\cdot a\cdot a)^2 = (a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a) =$ $= a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^6 = a^{3\cdot 2}$

Să demonstrăm unele dintre proprietăţile 4°–8°. Fie $a, b\in\mathbb{R}^*$, $n, m\in\mathbb{N}$.

4° $a^n\cdot a^m = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{factori}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ \text{factori}} = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{(n+m)\ \text{factori}} = a^{n+m}$.

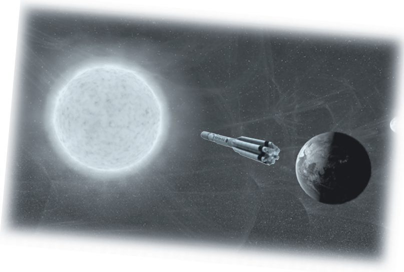
6° $(a\cdot b)^m = \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)}_{m\ \text{factori}} = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ \text{factori}}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{m\ \text{factori}} = a^m\cdot b^m$..

8° $(a^n)^m = \underbrace{a^n\cdot a^n\cdot\ldots\cdot a^n}_{m\ \text{factori}} = a^{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{m\ \text{termeni}}} = a^{n\cdot m}$.

- Calculați:

a) $\left(1\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{\square^3}{\square^3}=\frac{\square}{\square};$ b) $\frac{2^5\cdot(2^3)^4}{2^{15}}=\frac{2^5\cdot 2^{\square}}{2^{15}}=2^{5+\square-\square}=2^{\square}=\square.$

3.2. Puterea cu exponent întreg



1 Observați cum se aplică puterea cu exponent întreg.

a) Distanța de la Pământ până la Soare este de $1{,}495\cdot10^8$ km $=149\,500\,000$ km.

$10^8=10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=100\,000\,000.$

b) Norma zilnică de consum a vitaminei C pentru un adolescent este de

$$5\cdot10^{-2}\text{ g}=0{,}05\text{ g}=50\text{ mg}.$$

Explicăm

$$10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{10\cdot10}=\frac{1}{100}$$

Numărul 10^{-2} (egal cu $\frac{1}{100}$) este puterea cu exponentul –2 a numărului 10. Numărul 10 este baza puterii 10^{-2}.

Generalizăm

$a^m=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\text{ factori}},$ pentru orice $a\in\mathbb{R}^*$, $m\in\mathbb{N}^*$.

$a^0=1.$

$a^{-m}=\frac{1}{a^m},$ pentru orice $a\in\mathbb{R}^*$, $m\in\mathbb{Z}$.

- Examinați și completați adecvat:

a) $2^4=2\cdot2\cdot2\cdot2=16$ $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

$2^3=2\cdot2\cdot2=\square$ $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{\square}$

$2^2=2\cdot2=\square$ $2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{\square}$

$2^1=\square$ $2^{-1}=\square$

$2^0=1$

b) $5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125};\quad 5^{\square}=\frac{1}{5};\quad 5^{\square}=25;\quad 5^{\square}=1;\quad 5^{\square}=\frac{1}{25}.$

2 Observați și completați:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1:\frac{4}{9}=1\cdot\frac{9}{4}=\frac{3^2}{2^2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2;$

b) $\left(2\frac{1}{7}\right)^{-2}=\left(\frac{15}{7}\right)^{-2}=\left(\frac{\square}{\square}\right)^2=\square;$

c) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{\square}{\square}\right)^{-3}=\left(\frac{\square}{\square}\right)^3=\frac{\square}{\square}.$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m,$

pentru orice $a, b\in\mathbb{R}^*$, $m\in\mathbb{Z}$.

Rețineți

Regulile de calcul cu puteri cu exponent întreg

Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}^*$, $n, m \in \mathbb{Z}$:	**Verificăm**
1°. $1^m = 1$	$1^{-1} = \frac{1}{1^1} = 1$
2°. $(-1)^{2m} = 1$	$(-1)^{-4} = \frac{1}{(-1)^4} = \frac{1}{1} = 1$
3°. $(-1)^{2m+1} = -1$	$(-1)^{-17} = \frac{1}{(-1)^{17}} = \frac{1}{-1} = -1$
4°. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^3 \cdot a^{-5} = a^3 \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3}{a^3 \cdot a^2} = \frac{1}{a^2} = a^{-2} = a^{3+(-5)}$
5°. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{a^{-7}}{a^4} = \frac{1}{a^{\square} \cdot a^4} = \frac{1}{a^{\square}} = a^{\square} = a^{\square - \square}$
6°. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	$(a \cdot b)^{-3} = \frac{1}{(a \cdot b)^3} = \frac{1}{a^{\square} \cdot b^{\square}} = \frac{1}{a^{\square}} \cdot \frac{1}{b^{\square}} = a^{\square} \cdot b^{\square}$
7°. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\square} = \frac{b^{\square}}{a^{\square}} = \frac{a^{\square}}{b^{\square}}$
8°. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(a^{-2})^5 = \left(\frac{1}{a^2}\right)^5 = \frac{1}{a^{\square}} = a^{\square} = a^{\square \cdot \square}$

• Observați și completați:

a) $\frac{(\sqrt{2})^4 \cdot \frac{1}{8}}{16 \cdot 2^{-5}} = \frac{2^2 \cdot 2^{-3}}{2^4 \cdot 2^{-5}} = 2^{\square + \square - \square - (-5)} = 2^{\square} = \square$;

b) $a^{-48} = (a^{\square})^{-8} = (a^{12})^{\square} = (a^{\square})^{24} = (a^{-3})^{\square}$;

c) $\frac{a^2 + a^7}{a^{-2} + a^3} = \frac{a^{\square}(1 + a^5)}{a^{\square}(1 + a^5)} = a^{\square - \square} = a^{\square}$.

Exercișii și probleme

1 ☐ ☐

1. Citiți puterea. Indicați baza și exponentul puterii:

5^7; -7^3; $(-2)^5$; $\left(2\frac{1}{3}\right)^0$; $(-2{,}3)^{21}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; $(-3)^{-2}$.

2. ***Lucrați în perechi!*** Completați tabelul:

a	1	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	–1	$-\frac{1}{3}$	–0,2
a^2						
a^3						

3. Completați caseta astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

a) $27 = 3^{\square}$; b) $1000 = 10^{\square} = (\sqrt{10})^{\square}$; c) $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\square}$; d) $1 = (2{,}3)^{\square}$; e) $1 = (-1)^{\square}$; f) $-1 = (-1)^{\square}$.

4. Scrieți sub formă de putere:

a) $x^5 \cdot x^7$; b) $\frac{a^7 \cdot a^3}{a^2}$; c) $(-4y)^2 \cdot (4y^3)$; d) $a^9 b^3 \cdot \left(\frac{b^4}{a^2}\right)^2$.

5. ***Investigați!*** *Adevărat* sau *Fals*?

Pentru $n \in \mathbb{Z}^*$: a) $2^{-n} = -2^n$; b) $2^{-n} = \frac{1}{2^{-n}}$; c) $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$; d) $2^{-n} = -\frac{1}{2^n}$.

6. Scrieți sub formă de putere cu exponent întreg negativ:

a) $\frac{1}{3^{27}}$; b) $\frac{1}{5}$; c) $\frac{1}{a^6}$;

d) $\frac{1}{x^2}$; e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$; f) $\frac{1}{y}$.

7. Calculați:

a) 2^{-4}; b) 10^{-1}; c) 7^{-2};

d) $(-5)^{-3}$; e) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}$; f) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4}$.

8. Utilizând proprietățile puterii cu exponent întreg, efectuați operațiile:

a) $a^4 \cdot a^{-2}$; b) $\frac{a^6}{a^{-4}}$; c) $x^{-3} \cdot x^5$;

d) $\frac{x^{-3}}{x^{-5}}$; e) $(b^{-2})^6$; f) $((c^{-5})^2)^{-1}$.

9. Calculați:

a) $(3^2 \cdot 3^{-3})^{-1}$; b) $(7^{-1})^4 \cdot (7^{-2})^{-2}$;

c) $\frac{4^3 \cdot 4^{-5}}{4^{-4}}$; d) $32 \cdot 2^{-6}$.

10. Completați tabelul:

n	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
10^n									
10^{-n}									

11. În diverse domenii (fizică, tehnică, chimie etc.) valorile foarte mari şi foarte mici sunt adesea scrise în forma $n = a \cdot 10^k$, unde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

De exemplu, distanța de la Pământ la Soare este aproximativ egală cu $150000000 \text{ km} = 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ km}$.

Completați astfel încât propozițiile obținute să fie adevărate:

a) Grosimea peliculei cu bule: $l = 0{,}0000006 \text{ cm} = 6 \cdot 10^{\square} \text{ cm}$.

b) Masa Soarelui este de aproximativ:

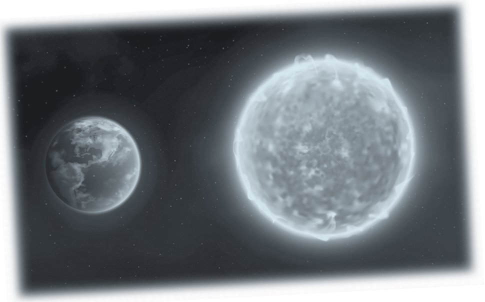
$m = 1989000000000000000000000000 \text{ t} = 1{,}989 \cdot 10^{\square} \text{ t}$.

c) Dimensiunea virusului gripal este de aproximativ:

$l = 0{,}00001 \text{ cm} = \boxed{} \text{ cm}$.

d) Conținutul de oxigen din atmosferă este de aproximativ:

$m = 1200000000000000 \text{ t} = \boxed{} \text{ t}$.



12. Scrieți numerele sub formă zecimală.

a) Viteza luminii este de $3 \cdot 10^5$ km/s.

b) Microscopul optic permite distingerea obiectelor cu lungimea de $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ cm.

c) Diametrul moleculei de apă este de $2{,}8 \cdot 10^{-7}$ mm.

d) Creierul uman este capabil să memorizeze zilnic $8{,}6 \cdot 10^7$ biți de informație.

13. *Lucrați în perechi!* În tabel sunt indicate masele câtorva elemente chimice.

a) Scrieți denumirea elementului cu masa atomului cea mai mare; cea mai mică.

b) Comparați masele atomilor de cupru şi natriu.

c) Scrieți într-un tabel denumirile acestor elemente în ordinea descrescătoare a masei atomilor lor.

Denumirea	Masa atomului (kg)
Aluminiu (Al)	$4{,}48 \cdot 10^{-26}$
Heliu (He)	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$
Fier (Fe)	$9{,}28 \cdot 10^{-26}$
Aur (Au)	$3{,}27 \cdot 10^{-25}$
Cupru (Cu)	$1{,}05 \cdot 10^{-25}$
Natriu (Na)	$3{,}81 \cdot 10^{-26}$

☐ 2 ☐

14. a) Scrieți numărul 2^{60} sub formă de putere cu baza $4, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, 32$.

b) Scrieți numărul 3^{48} sub formă de putere cu baza $27, 81, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$.

15. *Lucrați în perechi!* Observați modelul şi demonstrați similar că:

a) $81^3 + 3^{10}$ este divizibil cu 10; b) $5^{13} + 125^5$ este divizibil cu 13.

Model:

$16^5 + 2^{15}$ este divizibil cu 33, deoarece

$16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} =$
$= 2^{20} + 2^{15} = 2^{15}(2^5 + 1) =$
$= 2^{15} \cdot 33.$

16. Completați astfel încât egalitatea să fie adevărată:

a) $3^{\square}=81$; c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\square}=\frac{1}{125}$; e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\square}=\frac{8}{27}$;

b) $2^{\square}=\frac{1}{32}$; d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\square}=64$; f) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\square}=\frac{25}{16}$.

17. Aflați valoarea expresiei:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; b) $(-2)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{7}\right)^{0}$;

c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}+\left(-1\frac{3}{5}\right)^{-2}$; d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}+\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}$.

18. Calculați:

a) $(2{,}5)^{-5}\cdot(0{,}4)^{-5}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}\cdot\left(1\frac{1}{3}\right)^{-3}$;

b) $\frac{2^{6}}{(2^{-5}\cdot 8)^{-2}}$; c) $\frac{9^{-4}\cdot 4^{-4}}{2^{-9}\cdot 3^{-9}}$;

d) $\frac{5^{5}\cdot 25^{-2}}{5^{-3}\cdot 125}$; e) $\frac{(0{,}1)^{5}\cdot(0{,}1)^{-3}}{0{,}001}$;

f) $\frac{6^{-10}}{81^{-2}\cdot 32^{-2}}$; g) $\frac{15^{-3}}{9^{-2}\cdot 125^{-1}}$.

19. ***Lucrați în perechi!*** Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $5xy^{2}\cdot 0{,}2x^{-3}y^{-1}$; b) $2\frac{1}{3}a^{5}b^{-8}\cdot\frac{3}{7}a^{-1}b^{12}$;

c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^{-1}\right)^{-4}\cdot(0{,}5x^{-2})^{2}$; d) $\frac{(4a^{3}b^{-4})^{-1}}{0{,}2a^{-4}b^{2}}$.

20. Completați cu expresia adecvată:

a) $16x^{-12}y^{8}=(\square)^{4}$; b) $\frac{1}{27}a^{9}b^{6}=(\square)^{-3}$;

c) $\frac{x^{5}}{32y^{10}}=(\square)^{-5}$; d) $125a^{-15}b^{-3}=(\square)^{3}$.

21. Considerăm viteza luminii $c=3\cdot 10^{5}$ km/s.

a) Aflați în cât timp o rază de lumină parcurge distanța de 384 000 km de la Pământ până la Lună.

b) Anul-lumină este distanța parcursă de o rază de lumină timp de un an.

Considerând că anul are în medie 365,25 de zile, exprimați în ani-lumină distanța de $8{,}2\cdot 10^{13}$ km de la Pământ până la steaua Sirius.

22. Estimați câți ani vor mai exista păduri pe planeta noastră, dacă astăzi 1 ha de pădure este tăiat în fiecare minut. Suprafața continentelor de pe Pământ este de $15{,}7\cdot 10^{7}$ km², iar pădurile ocupă 20% din acest teritoriu. Rotunjiți răspunsul până la întregi.

23. Densitatea cuprului este de $8{,}9\cdot 10^{3}$ kg/m³. Aflați masa unei bucăți de cupru de forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de $2{,}5\cdot 10^{-1}$ m, 12 cm, $2\cdot 10^{-2}$ m.

☐ ☐ **3**

24. Scrieți sub formă de putere cu baza x:

a) $\frac{(x^{3})^{-2}\cdot(x^{-7})^{-1}}{x^{-4}}$; b) $\frac{(x^{-2})^{-4}\cdot(x^{2})^{-3}}{x^{-2}}$;

c) $\left(\frac{x^{-2}}{x^{-3}}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{x^{5}}\right)^{-1}$; d) $\left(\frac{3^{0}\cdot x^{-1}}{x^{2}}\right)^{5}:(x^{-2})^{14}$.

25. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\frac{3^{n-1}\cdot 7^{n+1}}{21^{n}}$, $n\in\mathbb{N}$; b) $\frac{15^{n}}{5^{n+1}\cdot 3^{n-1}}$, $n\in\mathbb{N}$.

26. Fie $2^{m}=a$, $2^{n}=b$, unde $m, n\in\mathbb{Z}$. Exprimați prin a și b expresia:

a) 2^{m+n}; b) 2^{m-n}; c) 8^{m+n}; d) 2^{2m-3n}.

27. Calculați forța de atracție F dintre Pământ și Lună utilizând formula $F=G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{R^2}$ și următoarele date:

$m_1\cdot m_2=43{,}82\cdot 10^{46}\,\text{kg}^2$; $R^2=14{,}44\cdot 10^{16}\,\text{m}^2$;

$G=6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$.

28. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $(x^{-2}-y^{-2})\cdot(x+y)^{-1}$; b) $\left(\frac{1}{x^{-2}}-\frac{1}{y^{-2}}\right)\cdot(x-y)^{-1}$;

c) $\left(\frac{a^{-1}-1}{a^{-1}+1}\right)^{-1}$; d) $\left(\frac{1+a^{-1}}{1-a^{-2}}\right)^{-1}$.

29. Calculați

$$\left(\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{-1}-(2\sqrt{2})^{-1}\right)^{2}\cdot\left[\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{-1}-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^{-1}\right].$$

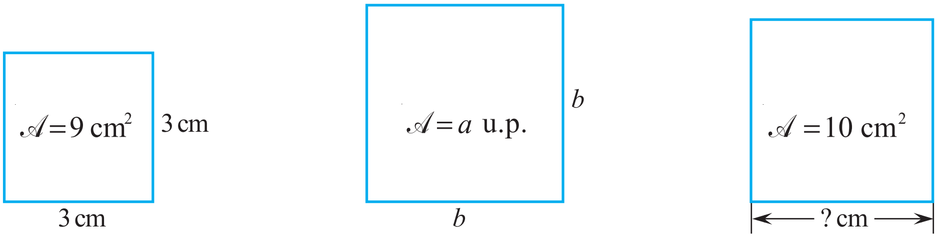
30. Monoxidul de carbon este nociv pentru sănătatea omului, de aceea concentrația lui în încăpere nu trebuie să depășească $0{,}2\cdot 10^{-2}$ g/m³. Ce număr maxim admisibil de molecule se pot afla într-o cameră de dimensiunile 4 m × 5 m × 2,5 m, dacă o moleculă de monoxid de carbon este formată dintr-un atom de carbon și unul de oxigen, adică are masa egală cu $12+16=28$ (u.a.)?

§ 4. Radicali

4.1. Rădăcina pătrată. Calcularea aproximativă a rădăcinii pătrate

1 Ce măsurări trebuie să efectuăm pentru a decupa din carton un pătrat cu aria de 9 cm²? Dar un pătrat cu aria de 10 cm²?

Explicăm



$3 \geq 0$ şi $3^2 = 9$

$\sqrt{9} = 3$

$b \geq 0$ şi $b^2 = a$

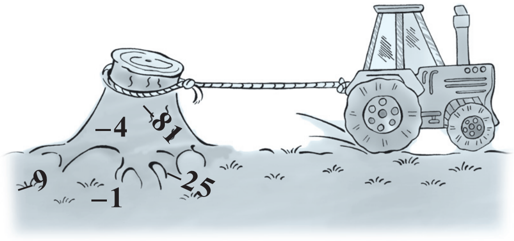
$\sqrt{a} = b$

Definiție

Rădăcină pătrată din numărul real nenegativ a (sau radical din a) se numeşte numărul real nenegativ b, al cărui pătrat este egal cu a.

rădăcina pătrată din numărul a → $\boxed{\sqrt{a}} = \boxed{b}$ ← valoarea rădăcinii pătrate → $\boxed{a, b \in \mathbb{R}_+,\ b^2 = a}$

radical



• Examinați şi completați adecvat:

$\sqrt{49} = 7$, deoarece $7 \geq 0$ şi $7^2 = 49$;

$\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{\square}{\square}} = \square$, deoarece $\square \geq 0$ şi $\square^{\square} = \square$;

$\sqrt{0{,}01} = \square$, deoarece $\square \geq 0$ şi $\square^{\square} = \square$.

Observații

1. Rădăcina pătrată dintr-un număr real nenegativ există şi valoarea ei este unică.

2. În mulțimea numerelor reale rădăcina pătrată a unui număr negativ nu există!

2 Observați şi completați:

Rețineți

$(\sqrt{a})^2 = a$, pentru $a \in \mathbb{R}_+$.

$(\sqrt{3})^2 = 3$

$\left(\sqrt{\frac{5}{19}}\right)^2 = \square$

$\left(\sqrt{\sqrt{3} - 2}\right)^2 = \square$

$\sqrt{a^2} = |a|$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

$\sqrt{7^2} = |7| = 7$

$\sqrt{(-5{,}1)^2} = |\square| = \square$

$\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = \left|\sqrt{3} - 2\right| =$

$= \square$, deoarece $\square > \square$

$\sqrt{a}$ nu are sens, pentru $a \in \mathbb{R}^*_-$.

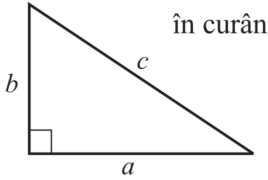
$\sqrt{2x - 1}$ are sens, dacă

$2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

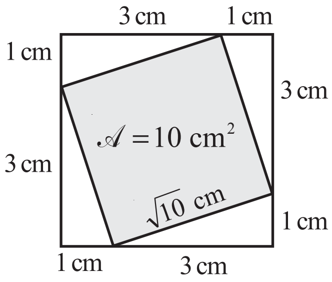
$\Leftrightarrow 2x \geq \square \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geq \square$

3 Din definiția rădăcinii pătrate rezultă că pătratul cu aria de $10\ \text{cm}^2$ are latura de $\sqrt{10}$ cm. Examinați desenul și observați cum poate fi decupat acest pătrat utilizând teorema lui Pitagora, care în curând va fi studiată la orele de geometrie:



$c^2 = a^2 + b^2$ – teorema lui Pitagora



4 Valoarea rădăcinii pătrate poate fi estimată prin rotunjire.

Ne amintim

La rotunjire:

– ultima zecimală la care se face rotunjirea rămâne neschimbată, dacă după ea urmează 0, 1, 2, 3 sau 4;

– ultima zecimală la care se face rotunjirea se mărește cu 1, dacă după ea urmează 5, 6, 7, 8 sau 9.

De exemplu, numărul $\sqrt{10} \approx 3$ – rotunjire la întregi; $\sqrt{10} \approx 3{,}1$ – rotunjire la prima zecimală; $\sqrt{10} \approx 3{,}16$ – rotunjire la zecimala a doua.

• Estimați, prin rotunjirea la întregi, valorile rădăcinilor pătrate $\sqrt{120}$, $\sqrt{146}$, $\sqrt{401}$ și apoi verificați estimarea făcută prin aplicarea calculatorului de buzunar.

INTERESANT ȘI UTIL

În Babilonul antic, pentru calculul valorii aproximative a rădăcinii pătrate se aplica formula $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$, unde $a > 0$ și $|b|$ este un număr foarte mic, în comparație cu a. Astfel, $\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1} \approx 3 + \frac{1}{6} = 3{,}1(6)$.

• Calculați $\sqrt{7}$ cu o exactitate de două zecimale, utilizând:

a) calculatorul de buzunar;

b) metoda aplicată în Babilonul antic.

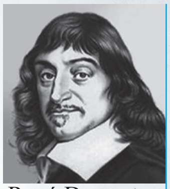
DIN ISTORIE...

În Grecia antică problema extragerii pătrate era asociată cu problema aflării lungimii laturii unui pătrat, a cărui arie era cunoscută. Însăși rădăcina pătrată era numită „latură”.

Probabil, din aceste considerente în latină noțiunile „latură” și „rădăcină” sunt exprimate de același cuvânt – *radix*. De la el provine cuvântul *radical*.

În secolele XIII–XV, matematicienii europeni, în locul cuvântului *radix*, foloseau notația R^2. De exemplu, numărul $\sqrt{3}$ era scris astfel: $R^2 3$.

În secolul al XVI-lea, pentru reprezentarea acțiunii de extragere a rădăcinii pătrate se folosea simbolul $\surd$. Abia în secolul al XVIII-lea, renumitul matematician francez René Descartes a introdus în uz simbolul $\sqrt{\ }$, pe care îl utilizăm și în zilele noastre.


René Descartes (1596–1650)

4.2. Proprietăți ale rădăcinii pătrate

1 Efectuați operațiile şi comparați rezultatele:

a) $\sqrt{36\cdot 25}=\sqrt{900}=30$; $\sqrt{36\cdot 25}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{25}=6\cdot 5=30$;

b) $\sqrt{\frac{9}{36}}=\sqrt{\frac{\square}{\square}}=\frac{\square}{\square}$; $\sqrt{\frac{9}{36}}=\frac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}}=\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$.

Rețineți

Proprietăți ale rădăcinii pătrate

1° $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$, unde $a, b\in\mathbb{R}_+$.

2° $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$, unde $a\in\mathbb{R}_+$, $b\in\mathbb{R}_+^*$.

3° $\sqrt{a^2}=|a|$, unde $a\in\mathbb{R}$.

4° $(\sqrt{a})^2=a$, unde $a\in\mathbb{R}_+$.

Observație Proprietatea 1° este adevărată pentru trei şi mai mulți factori nenegativi.


Calculăm fără calculator de buzunar

2 Observați şi completați:

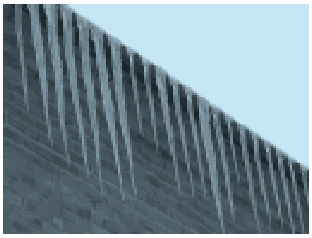
a) $\sqrt{35}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{21}=\sqrt{35\cdot 15\cdot 21}=\sqrt{7\cdot 5\cdot 5\cdot 3\cdot 7\cdot 3}=$

$=\sqrt{7^2\cdot\square^2\cdot\square^2}=\sqrt{7^2}\cdot\sqrt{\square^2}\cdot\sqrt{\square^2}=7\cdot\square\cdot\square=\square$;

b) $\sqrt{82^2-18^2}=\sqrt{(82+18)\cdot(82-18)}=\sqrt{\square\cdot\square}=\sqrt{\square}\cdot\sqrt{\square}=\square\cdot\square=\square$;

c) $\sqrt{18^2+24^2}=\sqrt{(6\cdot 3)^2+(6\cdot 4)^2}=\sqrt{6^2\cdot 3^2+6^2\cdot 4^2}=\sqrt{6^2(3^2+4^2)}=$

$=\sqrt{\square^2\cdot\square}=\sqrt{\square^2}\cdot\sqrt{\square}=\square\cdot\square=\square$.



3 În câte secunde va cădea un țurțur de gheață din streaşina situată la înălțimea de 40 m de la suprafața pământului?

Pentru efectuarea calculelor, aplicați formula $h=\frac{gt^2}{2}$, unde h – înălțimea (în metri), t – timpul (în secunde), $g\approx 9{,}8\ \text{m}/\text{s}^2$ – accelerația căderii libere.

Rezolvăm

$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$; $t\approx\sqrt{\frac{2\cdot 40}{9{,}8}}=\sqrt{\frac{40}{4{,}9}}=\sqrt{\frac{4}{0{,}49}}=\frac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}}=\frac{\square}{\square}=\square$.

Răspuns: $t\approx\square$ secunde.

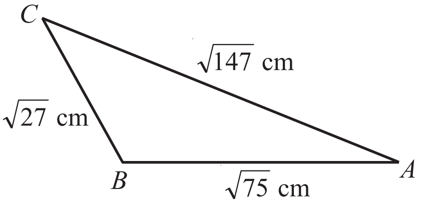
4 Utilizând datele din desenul alăturat, aflați perimetrul triunghiului *ABC*.

Rezolvare:

$\mathscr{P}=AB+BC+AC=\sqrt{75}+\sqrt{27}+\sqrt{147}=$

$=\sqrt{25\cdot 3}+\sqrt{9\cdot 3}+\sqrt{49\cdot 3}=$

$=\square\sqrt{3}+\square\sqrt{3}+\square\sqrt{3}=\square\sqrt{3}$ (cm).



Răspuns: $\mathscr{P}=\square\sqrt{3}$ cm.

Rețineți

Regula scoaterii factorului de sub radical

Dacă $a, b\in\mathbb{R}$ şi $b\geq 0$, atunci $\sqrt{a^2b}=|a|b$.

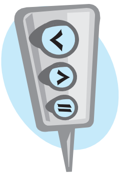
- Observați și completați.

Aducem la forma cea mai simplă expresia $\sqrt{5b^2}+\sqrt{5a^2}$, unde $b>0$, $a<0$:

$$\sqrt{5b^2}+\sqrt{5a^2}=|b|\cdot\sqrt{5}+|a|\cdot\sqrt{5}=(\square\bigcirc\square)\sqrt{5}.$$

5 Comparați $5\sqrt{\frac{3}{5}}$ cu $3\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Rezolvare:



$$5\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{25\cdot\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{25\cdot3}{5}}=\sqrt{5\cdot3}=\sqrt{15};$$

$$3\sqrt{\frac{5}{3}}=\sqrt{\square\cdot\frac{5}{3}}=\sqrt{\frac{\square\cdot5}{3}}=\sqrt{\square\cdot\square}=\sqrt{\square};$$

$$5\sqrt{\frac{3}{5}}\bigcirc3\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Rețineți

Regula introducerii factorului sub radical

Dacă $a,b\in\mathbb{R}$ și $b\geq0$, atunci $a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b}, & \text{dacă } a\geq0\\ -\sqrt{a^2b}, & \text{dacă } a<0.\end{cases}$

- Observați și completați.

Aducem la forma cea mai simplă expresia $ba\sqrt{\frac{3}{a}}\cdot\sqrt{\frac{27a^3}{b^2}}$, unde $a>0$, $b<0$:

$$ba\sqrt{\frac{3}{a}}\cdot\sqrt{\frac{27a^3}{b^2}}=-\sqrt{\frac{3a^2b^2}{a}}\cdot\sqrt{\frac{27a^3}{b^2}}=-\sqrt{\frac{\square}{\square}}=-\sqrt{\square}=\square.$$

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Calculați:

a) $\sqrt{49}$; b) $\sqrt{1}$; c) $\sqrt{0{,}01}$; d) $(\sqrt{3{,}2})^2$;

e) $(\sqrt{12{,}71})^2$; f) $\sqrt{(-4{,}21)^2}$; g) $\sqrt{\frac{9}{169}}$.

2. *Lucrați în perechi!*

Fie $a=144$, $b=25$. Aflați valoarea expresiei:

a) $a\sqrt{b}$; b) $b\sqrt{a}$; c) $\sqrt{ab}$; d) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$;

e) $a+\sqrt{b}$; f) $\sqrt{a}+b$; g) $\sqrt{a+b}$.

3. Calculați:

a) $2\sqrt{49}-3\sqrt{25}$; b) $4\sqrt{16}-2\sqrt{81}$;

c) $10\sqrt{\frac{81}{100}}$; d) $5\sqrt{\frac{36}{25}}$.

4. Utilizând calculatorul de buzunar, rotunjiți numărul până la: 1) zecimi; 2) sutimi; 3) miimi:

a) $\sqrt{12}$; b) $\sqrt{27}$; c) $\sqrt{41}$;

d) $\sqrt{19}$; e) $\sqrt{135}$; f) $\sqrt{226}$.

5. Utilizând calculatorul de buzunar, extrageți rădăcina pătrată și rotunjiți rezultatul până la sutimi.

a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{5{,}3}$; c) $\sqrt{50}$;

d) $\sqrt{1{,}8}$; e) $\sqrt{12{,}56}$; f) $\sqrt{360}$.

6. Scrieți unul dintre semnele „>”, „<”, „≤”, „≥”, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

a) $\sqrt{a^2}=a$, pentru $a\bigcirc0$;

b) $\sqrt{(a+2)^2}=a+2$, pentru $a\bigcirc-2$;

c) $(\sqrt{1-a})^2=1-a$, pentru $a\bigcirc1$;

d) $\sqrt{(1-a)^2}=a-1$, pentru $a\bigcirc1$.

7. Între care două numere naturale consecutive este situat numărul:

a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{17}$; c) $\sqrt{41}$; d) $\sqrt{151}$?

8. *Lucrați în perechi!* Aflați numărul întreg cel mai apropiat de numărul:

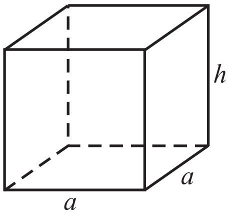
a) $\sqrt{50}$; b) $-\sqrt{35}$; c) $\sqrt{102}$; d) $-\sqrt{80{,}7}$.

9. Aflați valoarea expresiei:

a) $\sqrt{2-x}$, pentru $x=1$; b) $\sqrt{6x+3}$, pentru $x=-0{,}5$;

c) $\sqrt{x^2}$, pentru $x=-5$; d) $\sqrt{(2x+5)^2}$, pentru $x=-6$.

10. Volumul paralelipipedului dreptunghic a cărui bază este un pătrat cu latura a se calculează după formula $\mathcal{V}=a^2\cdot h$, unde h este înălțimea paralelipipedului. Exprimați necunoscuta a din această formulă prin V și h.



11. Calculați:

a) $\sqrt{16\cdot121}$; b) $\sqrt{49\cdot25}$; c) $\sqrt{9\cdot0{,}36\cdot16}$;

d) $\sqrt{\frac{36}{169}}$; e) $\sqrt{\frac{1}{81}\cdot\frac{16}{25}}$; f) $\sqrt{17^2\cdot3^2}$.

12. Calculați:

a) $\sqrt{48\cdot27}$; b) $\sqrt{50\cdot72}$; c) $\sqrt{98\cdot18}$;

d) $\sqrt{75\cdot243}$; e) $\sqrt{13^2-12^2}$; f) $\sqrt{17^2-8^2}$.

13. ***Lucrați în perechi!*** Scoateți factorul de sub radical: a) $\sqrt{72}$; b) $\sqrt{48}$; c) $\sqrt{75}$;

d) $\sqrt{90}$; e) $\frac{\sqrt{54}}{3}$; f) $5\sqrt{\frac{1}{125}}$.

14. ***Lucrați în perechi!*** Introduceți factorul sub radical: a) $3\sqrt{5}$; b) $5\sqrt{3}$; c) $2\sqrt{7}$;

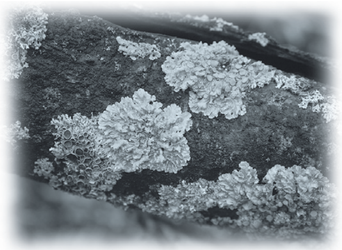
d) $-3\sqrt{2}$; e) $6\sqrt{3}$; f) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$.

15. ***Investigați!*** Ce viteză va atinge la contactul cu solul o cărămidă ce cade de la 1 m? Folosiți calculatorul de buzunar și rotunjiți rezultatul până la zecimi.

Indicații: $v=\sqrt{2gh}$, unde h – înălțimea, $g=9{,}8$ m/s^2 – accelerația căderii libere.

☐ **2** ☐

16. În timpul creșterii, lichenii formează cercuri. Raportul aproximativ între diametrul cercului și vârsta lichenului se determină prin formula $d=7\cdot\sqrt{t-12}$, pentru $t\geq12$, unde d – diametrul în mm, t – numărul de ani de la începutul creșterii lichenului. Aflați diametrul lichenului peste 16 ani de la începutul creșterii.



17. Determinați valorile lui x pentru care are sens expresia:

a) $\sqrt{x}$; b) $\sqrt{-x}$; c) $\sqrt{\frac{1}{x}}$; d) $\sqrt{x^2}$;

e) $\sqrt{\frac{1}{x^2}}$; f) $\sqrt{-x^2}$; g) $\sqrt{x-1}$; h) $\sqrt{x^2+4x+4}$.

18. Calculați:

a) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; b) $(3\sqrt{5}-7)\cdot(3\sqrt{5}+7)$;

c) $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2$; d) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2$.

19. Aflați valoarea expresiei:

a) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$; b) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}+3)^2}$.

20. Calculați:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{32}$; b) $3\sqrt{48}-5\sqrt{3}-2\sqrt{27}$;

c) $(\sqrt{3}+2)^2-\sqrt{12}$; d) $3\sqrt{80}+(6-\sqrt{5})^2-40$.

21. Scoateți factorul comun:

a) $\sqrt{13}-13$; b) $6+\sqrt{6}$; c) $\sqrt{14}-\sqrt{2}$;

d) $\sqrt{22}-\sqrt{11}$; e) $\sqrt{10}+\sqrt{20}$;

f) $a-\sqrt{a}$, $a\geq0$; g) $\sqrt{2b}+b$, $b\geq0$.

22. Utilizând calculatorul de buzunar, calculați cu o exactitate de 3 zecimale:

a) $\sqrt{5{,}6644}$; b) $\sqrt{0{,}015129}$;

c) $\sqrt{692{,}7424}$; d) $\sqrt{12{,}28}$.

23. Aflați toate numerele întregi situate între numerele:

a) $\sqrt{2}$ și 5; b) $2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{3}$;

c) $-\sqrt{7}$ și $\sqrt{17}$; d) $-\sqrt{13}$ și $2\sqrt{5}$.

24. Formula dată descrie relația dintre mărimi fizice pozitive. Aflați:

a) l, dacă $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$; b) S, dacă $t=\sqrt{\frac{2S}{a}}$;

c) F, dacă $V=k\cdot\frac{\sqrt{F}}{l}$; d) L, dacă $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}$.

25. Calculați cât mai simplu:

a) $\sqrt{4{,}58^2-4{,}42^2}$; b) $\sqrt{12^2+16^2}$;

c) $\sqrt{24^2+32^2}$; d) $\sqrt{42^2+56^2}$.

26. ***Lucrați în perechi!*** Calculați:

a) $\sqrt{2\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt{2\sqrt{3}-1}$; b) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6}}$; d) $\frac{1}{2\sqrt{5}-1}-\frac{1}{2\sqrt{5}+1}$.

27. Simplificați raportul:

a) $\frac{15}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}$; b) $\frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$; c) $\frac{\sqrt{22}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

d) $\frac{\sqrt{42}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$; e) $\frac{x+\sqrt{5}}{x^2-5}$; f) $\frac{t-\sqrt{3}}{t^2-9}$.

28. Scoateți factorul de sub radical: a) $\sqrt{32a^3b^{10}}$, unde $a>0,\ b\le 0$; b) $\sqrt{-8(a-3)^3}$, unde $a<3$.

29. Introduceți factorul sub radical: a) $a\sqrt{3}$, dacă $a<0$; b) $x\sqrt{x}$; c) $y\sqrt{-y}$; d) $(a-b)\sqrt{a-b}$.

30. ***Lucrați în perechi!*** Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\sqrt{\dfrac{a^8b^{12}}{c^2}}$, dacă $c<0$; b) $-x\sqrt{x^2y^{16}}$, dacă $x<0$; c) $(a-5)\sqrt{\dfrac{3}{a^2-10a+25}}$, dacă $a>5$.

31. Exprimați prin formulă dependența dintre valorile pozitive:

a) aria discului $\mathscr{A}$ cu raza R se calculează prin formula $\mathscr{A}=\pi R^2$. Aflați R.

b) energia cinetică E a corpului care se mişcă cu viteza v se calculează prin formula $E=\dfrac{mv^2}{2}$, unde m – masa corpului. Aflați v.

c) puterea curentului electric într-un circuit se calculează prin formula $P=I^2\cdot R$, unde I – intensitatea curentului, R – rezistența conductorului. Aflați I.

☐ ☐ **3**

32. Fără a utiliza calculatorul de buzunar, comparați numerele: $\sqrt{2022}+\sqrt{2024}$ şi $2\sqrt{2023}$.

33. Calculați, aplicând formulele $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ şi $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$:

a) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; b) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

34. Utilizând formulele radicalilor compuşi $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, unde $a, b\in\mathbb{R}_+$, $a\ge\sqrt{b}$, aduceți la forma cea mai simplă expresia: a) $\sqrt{7-\sqrt{24}}$; b) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$.

35. Aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu 7 cm². Aflați lungimea laturii AB, dacă $BC=\sqrt{2}$ cm. Rezolvând această problemă, elevii au obținut două răspunsuri: $BC=\dfrac{7}{\sqrt{2}}$ cm şi $BC=3{,}5\sqrt{2}$ cm. Determinați care dintre aceste răspunsuri este corect.

Exerciții și probleme recapitulative

1 ☐ ☐

1. Calculați:

a) 7^{-2}; b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}$; c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$; d) $\left(1\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$.

2. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\dfrac{a^{-12}\cdot a^6}{a^8}$; b) $\dfrac{(2x^{-3})^{-2}}{2^{-2}(x^{-2})^{-1}}$.

3. ***Investigați!*** *Adevărat* sau *Fals*?

a) $16<\sqrt{17}<18$; b) $3<\sqrt{11}<4$;

c) $2\sqrt{3}=3\sqrt{2}$; d) $2\sqrt{18}=3\sqrt{8}$.

4. Calculați:

a) $\sqrt{810\cdot 40}$; b) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{7}$; c) $\sqrt{1\dfrac{11}{25}}+\sqrt{3\dfrac{6}{25}}$.

5. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $3\sqrt{20}-3\sqrt{45}+4\sqrt{5}$; b) $(2-\sqrt{3})^2$;

c) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$; d) $(6-\sqrt{2})^2-(5+\sqrt{2})^2$.

6. ***Lucrați în perechi!*** Aduceți la forma cea mai simplă expresia: a) $\sqrt{36x^2y^3}$, dacă $x<0,\ y>0$;

b) $\sqrt{\dfrac{a^6}{25b^2}}$, dacă $a\ge 0,\ b>0$.

☐ **2** ☐

7. Aria discului se calculează cu ajutorul formulei $\mathscr{A}=\pi R^2$. Aflați R, dacă $\mathscr{A}=1\,256$ m², iar $\pi\approx 3{,}14$.

8. ***Investigați!*** Verificați dacă numărul $3+\sqrt{2}$ este soluție a ecuației:

a) $2x-\sqrt{8}=6$; b) $x(3-\sqrt{2})=5$.

9. ***Investigați!*** Pentru care valori reale ale variabilelor x şi y este adevărată propoziția:

$$\sqrt{xy}=\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-y}\,?$$

10. ***Investigați!*** Pentru care valori reale ale variabilelor a şi b este adevărată propoziția:

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\ ?$$

11. Aduceți expresia la forma cea mai simplă, dacă $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

a) $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-\frac{\sqrt{ab}}{a}$; b) $\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{1}{b}}-\frac{\sqrt{a}}{a}+\frac{\sqrt{b}}{b}$.

12. Efectuați:

a) $(4a^{-2}-b^{-4})(2b^2-a)^{-1}$; b) $(a^{-2}+1)^{-2}$.

13. ***Lucrați în grup!*** Proiect *Aplicații ale numerelor reale în viața de zi cu zi.*

☐ ☐ **3**

14. Calculați $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$, pentru $a=(2+\sqrt{3})^{-1}$ și $b=(2-\sqrt{3})^{-1}$.

15. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $(2-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}$;

b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1$.

16. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, dacă $1\le x\le 2$.

17. Demonstrați că dacă $a>b$ și $a^2+b^2=4ab$, atunci $\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta 1

1. a) Scrieți în casetă litera **A** dacă propoziția este adevărată sau litera **F** dacă propoziția este falsă:

$-\sqrt{900}\in\mathbb{Z}$ ☐ $3\sqrt{7}\in\mathbb{Q}$ ☐

$6{,}2(5)\in\mathbb{R}_+$ ☐ $|4-3\sqrt{3}|\in\mathbb{I}_-$ ☐

b) Completați cu un număr real, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$6{,}2-\sqrt{900}+4\frac{2}{5}-$ ☐ $=2\,013.$

c) Aflați 25 % din numărul real obținut la b).

d) Explicitați modulul $|4-3\sqrt{3}|$.

e) Scrieți numărul 4^{12} sub formă de putere cu baza $\frac{1}{4}$.

2. Nicu a făcut în 2 luni economii pentru a procura un album. În prima lună el a făcut o economie de bani ce reprezintă $\frac{3}{5}$ din prețul albumului, iar în luna a doua – o economie de 62 de lei.

a) Cât costă albumul?

b) În care dintre aceste luni s-a economisit o sumă mai mare de bani?

3. Rezolvați problema:

Viteza sunetului în aer este de 340 m/s. La ce distanță (în kilometri) s-a produs tunetul care se aude după 10,5 secunde? ($v=s/t$)

Scrieți răspunsul sub forma $a\cdot 10^b$, unde $a, b\in\mathbb{N}^*$.

Varianta 2

1. a) Scrieți în casetă litera **A** dacă propoziția este adevărată sau litera **F** dacă propoziția este falsă:

$\sqrt{400}\in\mathbb{Z}$ ☐ $5\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ ☐

$-3{,}0(4)\in\mathbb{R}_-$ ☐ $|3-2\sqrt{2}|\in\mathbb{I}_+$ ☐

b) Completați cu un număr real, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$-3{,}5+\sqrt{400}-7\frac{2}{5}+$ ☐ $=2\,015.$

c) Aflați 25 % din numărul real obținut la b).

d) Explicitați modulul $|3-2\sqrt{2}|$.

e) Scrieți numărul 9^6 sub formă de putere cu baza $\frac{1}{3}$.

2. Un automobil a parcurs distanța de la Chişinău până la Ungheni în 2 ore. În prima oră el a parcurs $\frac{3}{5}$ din drum, iar în ora a doua – 48 km.

a) Care este distanța dintre Chişinău şi Ungheni?

b) În care oră s-a parcurs o distanță mai mare?

3. Rezolvați problema:

Un CD-ROM poate înmagazina circa 650 Mb. Calculați câți biți vor fi înmagazinați în 3 CD-ROM-uri. (1 Mb = 1024 b)

Scrieți răspunsul sub forma $a\cdot 10^b$, unde $a, b\in\mathbb{N}^*$.

Capitolul 2 Calcul algebric

Lumea este condusă de numere.
Pitagora

§1. Operaţii cu numere reale reprezentate prin litere

1.1. Numere reale reprezentate prin litere

- Fie expresiile $-3ab^2$, $5bc$, $-1{,}5ab^2$, $\sqrt{10}bc$, $1a$, x^2y, $2t$.

Ne amintim

O expresie sub forma unui produs în care factorii sunt numere sau litere este o expresie algebrică.

Reţineţi

Fiecare expresie algebrică este formată din **coeficient** şi **parte literală**.
Coeficientul este număr real.

$-3ab^2$; $5bc$; $-1{,}5ab^2$; $\sqrt{10}\,bc$; $1a$; x^2y; $2t$
Determinaţi ■ – coeficientul
🟦 – partea literală

Lucraţi în perechi

- Copiaţi şi completaţi tabelul:

Expresia	$-\sqrt{5}xy$	ab	$2{,}5x^3y$	$7a^2b$	$\frac{3}{5}t$	$-x^2y$
Coeficientul				7		
Partea literală		ab				

Reţineţi

1. Suma a două sau mai multe expresii algebrice este o expresie algebrică. ⟶ $a^2+2ab+b^2$
2. Produsul a două sau mai multe expresii algebrice este o expresie algebrică. ⟶ $2x\cdot(-3x^2y)\cdot yz$
3. Dacă $E\neq 0$ este expresie algebrică, atunci E^{-1} tot este o expresie algebrică. ⟶ $E(x)=2x^3$, $x\neq 0$, – expresie algebrică,
deci $E^{-1}(x)=\dfrac{1}{2x^3}$, $x\neq 0$, – expresie algebrică.

Ne amintim

Cu expresiile algebrice se pot efectua aceleaşi operaţii care se efectuează cu numere: adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea, ridicarea la putere, extragerea rădăcinii. Aceste operaţii au aceleaşi proprietăţi ca şi operaţiile cu numere reale.

1.2. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

1 Examinați şi completați:

$$-3ab^2+5bc-1{,}5ab^2+\sqrt{10}bc-a=$$

$$=(-3+(-1{,}5))ab^2+(\square+\square)bc-a=\square ab^2+\square bc-\square.$$

Termeni asemenea: $-3ab^2$ şi $\square$, $\sqrt{10}bc$ şi $\square$.

Definiție

Termenii unei expresii care au aceeaşi parte literală se numesc **termeni asemenea**.

Rețineți

A reduce termenii asemenea înseamnă a înlocui suma acestor termeni cu un termen asemenea având coeficientul egal cu suma coeficienților termenilor dați.

2 Examinați şi continuați reducerea termenilor asemenea:

$$2{,}5a^2-\sqrt{7}+\sqrt{5}ab^3+\frac{2}{5}a^2-\frac{1}{2}ab^3+3\sqrt{7}-25=$$

$$=(2{,}5+\square)a^2+(\square-0{,}5)ab^3+\square\sqrt{7}-25=$$

$$=\square a^2+\square ab^3+\square\sqrt{7}-25.$$

1.3. Înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere a numerelor reale reprezentate prin litere

1 Examinați şi completați:

a) $8a^2b\cdot(-1{,}5ab^3)=8\cdot(-1{,}5)\cdot\square^2\cdot a\cdot\square\cdot b^3=-\square\cdot a^3\cdot\square^4;$

b) $16x^3y^5:4x^5y^2=(16:4)\cdot(x^3:x^5)\cdot(y^5:y^2)=$

$$=\square\cdot x^{\square-\square}\cdot y^{\square-\square}=\square\cdot x^{\square}\cdot y^{\square}=\frac{\square\cdot y^{\square}}{x^{\square}}.$$

Rețineți

Pentru a înmulți (împărți) numerele reale reprezentate prin litere:
- înmulțim (împărțim) coeficienții;
- înmulțim (împărțim) părțile literale aplicând proprietățile puterii.

2 Examinați şi completați:

$$\left(-\frac{2}{5}a^2bc^4\right)^3=\left(-\frac{2}{5}\right)^3\cdot a^{2\cdot\square}\cdot b^{\square}\cdot c^{4\cdot\square}=\square\cdot a^{\square}\cdot b^{\square}\cdot c^{\square}.$$

Rețineți

Pentru a ridica la putere un număr real reprezentat prin litere:
- ridicăm la puterea dată coeficientul;
- ridicăm la puterea dată fiecare factor din partea literală.

1.4. Desfacerea parantezelor. Factorizări

1 Desfaceți parantezele și completați:

a) $3xy^2\cdot(\sqrt{2}x^2+x^2y)=3xy^2\cdot\square+3xy^2\cdot\square=$

$=(3\cdot\square)\cdot x^{\square+\square}y^{\square}+3\cdot\square^{\square+\square}\cdot\square^{\square+\square}=$

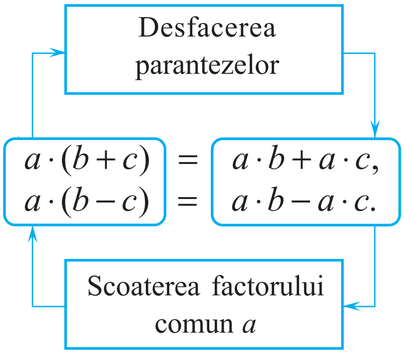
$=\square+\square;$

b) $-1{,}5a^3b^2\cdot(4a^2b-0{,}2ab)=$

$=\square\cdot4a^2b-\square\cdot0{,}2ab=$

$=\square\cdot4\cdot a^{\square+\square}b^{\square+\square}+\square\cdot0{,}2\cdot a^{\square+\square}b^{\square+\square}=$

$=\square a^{\square}b^{\square}+\square a^{\square}b^{\square}.$



Rețineți

Înmulțirea numerelor reale reprezentate prin litere este distributivă față de adunare și scădere.
$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\quad a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c.$$

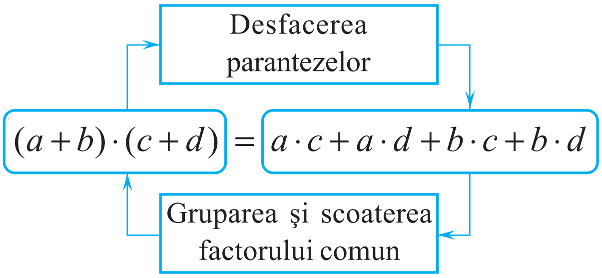
- Observați și completați:

$(-2x+\sqrt{3}x^2y^2)\cdot(x^2+xy)=$

$=(-2x)\cdot\square+(-2x)\cdot xy+$

$+\square\cdot x^2+\sqrt{3}x^2y^2\cdot\square=$

$=\square+\square+\square+\square.$

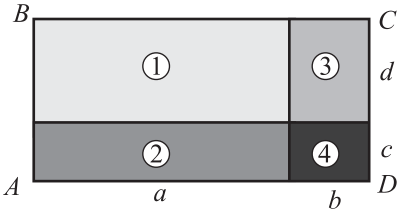


Rețineți

Pentru orice numere reale a, b, c, d:
$$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

Lucrați în perechi

- Argumentați formula
$$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd,$$
calculând aria dreptunghiului reprezentat prin două moduri.



2 Scrieți ca produs de factori expresia
$$6\sqrt{30x^2y^3}+3\sqrt{6xy^5}.$$

Examinați și completați:

$$6\sqrt{30x^2y^3}+3\sqrt{6xy^5}=\underbrace{2\cdot3\cdot\sqrt{5\cdot6}\cdot xy^2\cdot\square}+\underbrace{3\sqrt{6}\cdot xy^2\cdot\square}=$$

$$=\square\cdot(2\sqrt{5}\,\underbrace{\square}+\underbrace{\square}).$$

factor comun rezultatul împărțirii fiecărui termen la factorul comun

Scoaterea factorului comun:

$3\sqrt{5}+2\sqrt{15}=$

$=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=$

$=\sqrt{5}(3+2\sqrt{3}).$

Rețineți

- **A factoriza expresia** înseamnă a scrie această expresie ca produs de expresii.
- Factorizarea se poate obține prin scoaterea **factorului comun**:

$$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c),\ \sqrt{15}-2\sqrt{3}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}(\sqrt{5}-2).$$

• Completați adecvat:

$$2{,}4a^5b^4-1{,}8a^2b=\square\cdot 4\cdot a^5b^4-\square\cdot 3\cdot a^2b=0{,}6\cdot\square^2\cdot\square(4a^{\square}b^{\square}-3).$$

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. ***Lucrați în perechi!*** Copiați și completați tabelul:

a)

Expresia	$2{,}3x$	$-x^2y$	$\sqrt{5}ab$	ax^3	$-\sqrt{3}by$	$-5,(2)x^2yz$	$\frac{1}{5}a^2b^3c$
Coeficientul							
Partea literală							

b)

Expresia	$-\sqrt{7}xy$	a^2b	$-x^3z$	$7,(8)ax$	$\frac{4}{7}a^2b^3$	$3{,}8tz$	$-2axby$
Coeficientul							
Partea literală							

2. Observați expresia şi scrieți termenii asemenea:

a) $3{,}5ax-2ty+\sqrt{3}ax+y^3-\sqrt{7}ty-7{,}3y^3+\sqrt{7}$;

$3{,}5ax;\ \dots$ $\quad$ $-2ty;\ \dots$ $\quad$ $y^3;\ \dots$ $\quad$ $\dots$

b) $\frac{2}{7}ab+\sqrt{13}a^2b-0{,}5ab-ab^3-5a^2b+7{,}5ab^3-3\sqrt{15}.$

$-0{,}5ab;\ \dots$ $\quad$ $-ab^3;\ \dots$ $\quad$ $-5a^2b;\ \dots$ $\quad$ $\dots$

3. Reduceți termenii asemenea:

a) $7\sqrt{7}-3\sqrt{3}+2{,}5\sqrt{7}+15\sqrt{3}-7\sqrt{10}$; b) $5\sqrt{15}-2\sqrt{2}+\sqrt{60}+7\sqrt{8}-6\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{32}.$

4. Reduceți termenii asemenea:

a) $-2{,}7a+3b-1\frac{3}{4}a-\frac{2}{5}b+\sqrt{7}$; b) $-2008+\frac{2}{3}ab^2-78ab+5\frac{1}{3}ab^2+2007-22ab.$

5. Scrieți ca sumă expresia:

a) $4{,}12x^2y$; b) $-3\sqrt{2}tz$; c) $6,(15)ab$; d) $-\frac{2}{7}xy^2.$

6. Efectuați înmulțirea:

a) $7x^2y^3z\cdot(-3xyz^3)$; b) $(-2{,}8ab)\cdot(-5a^3b).$

7. Efectuați împărțirea:

a) $5{,}2x^3y:0{,}4xy^2$; b) $-\frac{3}{17}ab^5:\frac{9}{17}a^2b^3$;

c) $\sqrt{15t^2z^2}:(-\sqrt{5}tz)$; d) $2,(5)a^3b^2:0,(5)a^4b.$

8. Ridicați la putere:

a) $(-3xy^2)^2$; b) $(\sqrt{5}a^2b)^4$;

c) $(-2\frac{1}{5}tz)^{-3}$; d) $(\sqrt{2}a^3b^{-2})^{-2}.$

9. ***Investigați!*** *Adevărat* sau *Fals*?

a) $-(1-4x)=4x+1$; b) $5t+1=6t$;

c) $x+x+x=x^3$; d) $-3x-7x=-10x$;

e) $|-x|+|x|=0$; f) $\sqrt{3}x-x=\sqrt{3}.$

10. Desfaceți parantezele:

a) $m(m+n)$; b) $z(z-y)$; c) $3a(b-2c)$;

d) $-\sqrt{2}(2x-\sqrt{2}y)$; e) $1{,}7x(x+3y)$; f) $\sqrt{7}(\sqrt{2}a+\sqrt{7}).$

11. Desfaceți parantezele:

a) $4x^2y(-3xy^5+8yz)$; b) $-7,(2)ab(9a^2b^3-18abc)$;

c) $-\sqrt{7}t(\sqrt{14}tz-\sqrt{21}t^2z^3)$; d) $\frac{2}{3}ab(18a^2b^2-15a).$

12. Calculați aria dreptunghiului cu dimensiunile:

a) $(\sqrt{7}+4)$ cm şi $(4-\sqrt{7})$ cm;

b) $(8-3\sqrt{5})$ cm şi $(3\sqrt{5}+8)$ cm.

13. Desfaceți parantezele:

a) $(2x-3y)(5x+7y-1)$; b) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

c) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$; d) $(x^2-y^2)(x+y).$

14. Scoateți factorul comun:

a) $7ab^2+14a^2b$; b) $-3{,}6x^2y^3+0{,}8x^4y^5$;

c) $2\sqrt{17}xy^4-\sqrt{17}x^2y$; d) $-15tz^2-\sqrt{5}t^2z.$

☐ 2 ☐

15. Se știe că x și y sunt numere reale. Scrieți numărul real:
1) $5x+2y$; 2) $-3x+2$; 3) $-\sqrt{2}+2xy$:
a) ca sumă de trei numere reale reprezentate prin litere;
b) ca sumă de cinci numere reale reprezentate prin litere;
c) ca diferență de trei numere reale reprezentate prin litere;
d) ca sumă de opt numere reale nenule reprezentate prin litere.

16. Efectuați:
a) $\sqrt{7}x(\sqrt{7}xy-x)-(x-y)(\sqrt{28}x+y)-(\sqrt{7}xy)^2$;
b) $\frac{5}{7}x^{-1}\cdot y^{-2}(xy-49x^{-3})+\frac{1}{7}(x+y^2)(x-y^2)$.

17. Demonstrați că egalitatea $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ este adevărată pentru orice $a, b \in \mathbb{R}^*$.

18. Efectuați:
a) $(a-2a)+(3a-4a)+(5a-6a)+(7a-8a)+$
$+(8a-9a)+(9a-10a)$;
b) $x-2x+3x-4x+\ldots+199x-200x$.

19. Ce este mai mare: aria unui dreptunghi cu dimensiunile $(6-2\sqrt{7})$ cm și $(6+2\sqrt{7})$ cm sau aria unui pătrat cu latura de $(2+\sqrt{3})$ cm?

20. Care dintre doi șahiști are o șansă mai mare de a repurta victorie la un turneu, știind că unul are șansa $p_1=\frac{7}{13}$ să obțină victorie, iar celălalt – $p_2=\frac{4}{7}$?

21. ***Lucrați în perechi!*** Scrieți ca produs de trei factori diferiți de 1:
a) $x^3(x-0{,}7)-x^2(x-0{,}7)$;
b) $(2x+y)^2(4x-3)-(2x+y)(4x-3)$.

22. Calculați a^2, știind că

$$a=\sqrt{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})-\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+$$
$$+\sqrt{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}.$$

23. Aflați cea mai mică valoare a expresiei:
a) x^2+5; b) x^2-2;
c) $(3x)^2+(4x)^2$; d) $7x^2+1$.

24. ***Investigați!*** *Adevărat* sau *Fals*?
a) $\sqrt{x}=-x$ pentru orice $x\in\mathbb{R}_-$;
b) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=0$ pentru $x=0$;
c) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=0$ pentru $x=0$;
d) $\sqrt{x^2}=(\sqrt{x})^2$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

A/F

În cazul în care propoziția este falsă, aflați răspunsul corect.

25. Din Chișinău spre Giurgiulești s-au pornit concomitent două autovehicule. Viteza unuia dintre ele era de 65 km/h, iar viteza celuilalt – de 72 km/h. Scrieți, printr-o expresie, care va fi distanța dintre autovehicule peste t ore. Calculați această distanță, dacă:
a) $t=0{,}5$; b) $t=1$; c) $t=1{,}5$; d) $t=2$.

26. ***Lucrați în perechi!*** Arătați că suma oricăror trei numere întregi consecutive este divizibilă cu 3.

☐ ☐ 3

27. Demonstrați că ecuația $\sqrt{x}=-x-1$ nu are soluții reale.

28. Demonstrați că expresia $\sqrt{x^2-6x+10}$ are sens pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

29. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=\sqrt{x}$; b) $\sqrt{x^2}-\sqrt{x}=0$.

30. ***Investigați!*** Pentru care valori naturale ale lui n valoarea raportului $\frac{n^3+n-2}{n+1}$ este un număr întreg?

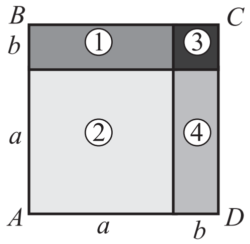
• *Probleme pentru campioni*

31. Aduceți la forma cea mai simplă expresia $\sqrt{a-2\sqrt{a+1}+2}$.

32. Aflați patru numere naturale consecutive al căror produs este egal cu 570 024.

§2. Formule de calcul prescurtat

2.1. Pătratul sumei și pătratul diferenței



Lucrați în perechi

1 Calculați, prin două moduri, aria pătratului *ABCD*:

$\mathcal{A}_{ABCD} = (\bigcirc + \square)^2;$

$\mathcal{A}_{ABCD} = \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2.$

Rețineți

Formula pătratului sumei de doi termeni:

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) =$
$= a^2 + ab + ba + b^2 =$
$= a^2 + 2ab + b^2$

- Completați adecvat:

Pătratul sumei de doi termeni este egal cu...

2 Examinați și completați adecvat:

$(a-b)^2 = [a+(-b)]^2 = \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2 = \bigcirc^2 - 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2.$

Rețineți

Formula pătratului diferenței:

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) =$
$= a^2 - ab - ba + b^2 =$
$= a^2 - 2ab + b^2$

- Completați adecvat:

Pătratul diferenței este egal cu...

- Observați și completați adecvat:

a) $(2x^3 + y^2) = \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2 = 4x^6 + 4 \cdot \square + \square^4;$

b) $(\underset{\overset{\uparrow}{a}}{\sqrt{5}xy} - \underset{\overset{\uparrow}{b}}{y^5})^2 = \underset{\overset{\uparrow}{a^2}}{\bigcirc^2} - 2 \cdot \underset{\overset{\uparrow}{a}}{\bigcirc} \cdot \underset{\overset{\uparrow}{b}}{\square} + \underset{\overset{\uparrow}{b^2}}{\square^2} = \square - 2\square + \square.$

2.2. Produsul dintre sumă și diferență

1 Bunicul l-a rugat pe Dinu să calculeze mintal câte gutui au fost culese, știind că fructele au fost împachetate în 101 lăzi, astfel încât în fiecare ladă erau 99 de gutui.

Ajutați-l pe Dinu să efectueze calculul respectiv!

Rezolvare:

$101 \cdot 99 = (\square + \square)(\square - \square) = \square - \square = \square.$

Răspuns: $\square$ de gutui.

2 Observați și completați:

$(1{,}5t - \sqrt{2}z)(1{,}5t + \sqrt{2}z) = (1{,}5t)^2 - \square^2 = \square - \square.$

Rețineți

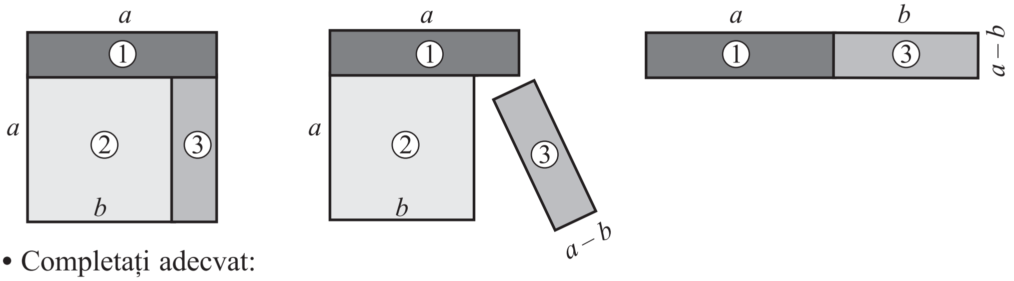
Formula produsului dintre sumă și diferență:

$$\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

$(a+b)(a-b) =$
$= a^2 - ba + ba - b^2 =$
$= a^2 - b^2$

Lucrați în perechi

- Justificați formula $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ cu ajutorul reprezentărilor geometrice:



- Completați adecvat:

Produsul dintre sumă și diferență este egal cu...

- Observați și completați:

$$\Big(\underset{\overset{\uparrow}{a}}{\frac{3}{4}x^{-2}}+\underset{\overset{\uparrow}{b}}{\sqrt{3}y}\Big)\Big(\underset{\overset{\uparrow}{a}}{\frac{3}{4}x^{-2}}-\underset{\overset{\uparrow}{b}}{\sqrt{3}y}\Big)=\underset{\overset{\uparrow}{a^2}}{\bigcirc^2}-\underset{\overset{\uparrow}{b^2}}{\square^2}=\bigcirc-\square$$

2.3. Cubul sumei și cubul diferenței

1 Examinați și completați:

a) $(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)^{\square}=(a+b)\cdot(\square^2+2\square\bigcirc+\bigcirc^2)=$

$=a^3+2\square^2\bigcirc+a\cdot\bigcirc^2+b\cdot\square^2+2\square\bigcirc^2+\bigcirc^3=$

$=a^3+3\square^2\bigcirc+3\square\bigcirc^2+b^3;$

b) $(\underset{\overset{\uparrow}{a}}{\underbrace{2x}}+\underset{\overset{\uparrow}{b}}{\underbrace{y^2}})^3=\underset{\overset{\uparrow}{a^3}}{\square}^3+3\underset{\overset{\uparrow}{a^2}}{\square}^2\underset{\overset{\uparrow}{b}}{\bigcirc}+3\underset{\overset{\uparrow}{a}}{\square}\underset{\overset{\uparrow}{b^2}}{\bigcirc}^2+\underset{\overset{\uparrow}{b^3}}{\bigcirc}^3.$

Rețineți

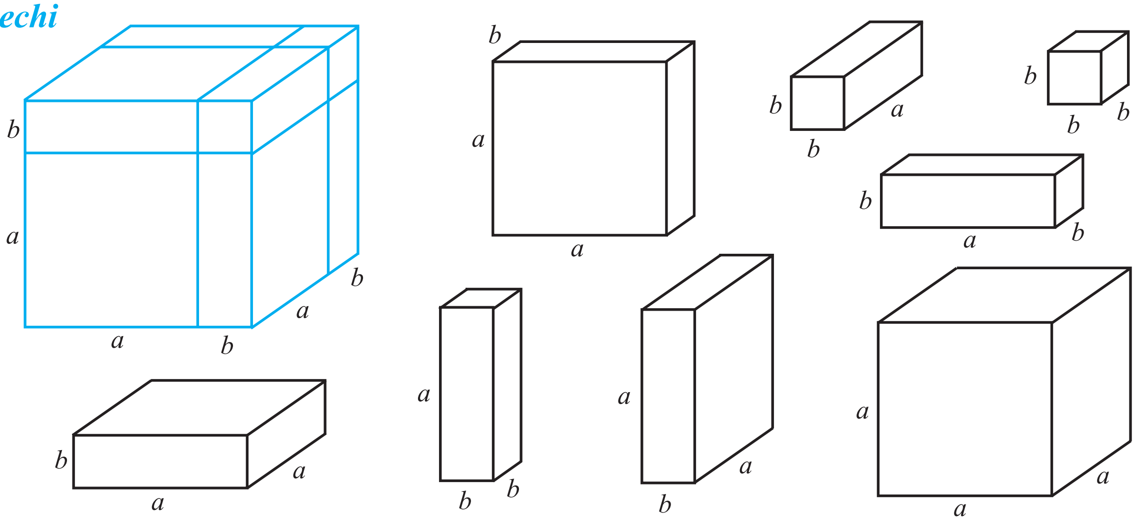
Formula cubului sumei de doi termeni:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(\square+\bigcirc)^3=\square^3+3\square^2\bigcirc+3\square\bigcirc^2+\bigcirc^3.$$

Lucrați în perechi

- Justificați formula $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ cu ajutorul figurilor:



- Completați adecvat:

Cubul sumei de doi termeni este egal cu...

- Observați și completați adecvat:

$$(a^3+2ab)^3=(a^3)^{\square}+3(a^3)^{\square}\cdot 2ab+3\cdot a^3\cdot(2ab)^{\square}+(2ab)^{\square}=$$

$$=a^{\square}+6a^{\square}\cdot b^{\square}+12a^{\square}\cdot b^{\square}+8a^{\square}b^{\square}.$$

2 Examinați și trageți concluzia:

$$(a-b)^3=[a+(-b)]^3=a^3+3a^2\cdot(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Rețineți

Formula cubului diferenței: $\boldsymbol{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

$(\square-\bigcirc)^3=\square^3-3\square^2\bigcirc+3\square\bigcirc^2-\bigcirc^3.$

- Examinați și completați adecvat:

$$(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2=(a-b)(a^2-2ab+b^2)=a^{\square}-3a^{\square}b+3ab^{\square}-b^{\square}.$$

- Completați adecvat:

Cubul diferenței este egal cu...

3 Observați și completați:

$$(\underbrace{x^2}_{a}-\underbrace{0,5xy}_{b})^3=\underset{a^3}{\square^3}-3\underset{a^2}{\square^2}\underset{b}{\bigcirc}+3\underset{a}{\square}\underset{b^2}{\bigcirc^2}-\underset{b^3}{\bigcirc^3}=\square-\square+\square-\square.$$

Lucrați în perechi

4 Volumul cubului este egal cu a^3.

a) Lungimea muchiei cubului s-a mărit cu b. Cu ce este egal volumul noului cub?

b) Dacă lungimea muchiei cubului se micșorează cu b, cu ce va fi egal volumul noului cub?

2.4. Suma cuburilor. Diferența cuburilor

Lucrați în perechi

1 Examinați și trageți concluzia:

$a^3+b^3=(a+b)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2)$, deoarece $(a+b)(a^2-ab+b^2)=$

$$=\square^3-\square^2\bigcirc+\square\bigcirc^2+\bigcirc\square^2-\square\bigcirc^2+\bigcirc^3=\square^3+\bigcirc^3.$$

- Completați adecvat: $x^3+27=\underset{a^3}{x^3}+\underset{b^3}{\bigcirc^3}=(\underset{a}{x}+\underset{b}{\bigcirc})(\underset{a^2}{x^{\square}}-\underset{a}{x}\underset{b}{\bigcirc}+\underset{b^2}{\bigcirc^{\square}}).$

Rețineți

Formula sumei cuburilor: $\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

$\square^3+\bigcirc^3=(\square+\bigcirc)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2).$

- Examinați și completați:

$$8t^3+125z^6=(2t)^3+(5z^2)^3=(\square+\bigcirc)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2)=$$

$$=(\square+\bigcirc)(\square-\square+\square).$$

Lucrați în perechi

2 Examinați și trageți concluzia:

$a^3-b^3=(a-b)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2)$, deoarece $(a-b)(a^2+ab+b^2)=$

$=\square^3-\square^2\bigcirc+\square\bigcirc^2-\bigcirc\square^2-\square\bigcirc^2-\bigcirc^3.$

- Completați adecvat: $\underset{\underset{a^3}{\uparrow}}{x^3}-27=x^3-\underset{\underset{b^3}{\uparrow}}{\bigcirc^3}=(\underset{\underset{a}{\uparrow}}{x}-\underset{\underset{b}{\uparrow}}{\bigcirc})(\underset{\underset{a^2}{\uparrow}}{x^{\square}}+\underset{\underset{a}{\uparrow}}{x}\underset{\underset{b}{\uparrow}}{\bigcirc}+\underset{\underset{b^2}{\uparrow}}{\bigcirc^{\square}}).$

Rețineți

Formula diferenței cuburilor: $\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

$\square^3-\bigcirc^3=(\square-\bigcirc)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2).$

- Completați adecvat:

Diferența cuburilor este egală cu produsul dintre diferența acestor numere și...

- Descompuneți în factori diferența cuburilor:

$64t^6-8z^3=(4t^2)^3-(2z)^3=(\square-\bigcirc)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2)=$

$=(\square-\square)(\square+\square+\square).$

Observație Formulele de calcul prescurtat sunt identități.

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Efectuați:

a) $(x+1)^2$; b) $(1+x)^2$; c) $(2a+3)^2$;

d) $(\sqrt{5}+t)^2$; e) $(0{,}5x^2y+y^4)^2$; f) $(\sqrt{2}+3\sqrt{3}z)^2$.

2. Efectuați:

a) $(x-1)^2$; b) $(1-x)^2$;

c) $(7a-1{,}1b^2)^2$; d) $(\sqrt{11}-t^3)^2$.

3. Efectuați:

a) $(-y+5)^2$; b) $(-b^3+5)^2$;

c) $(t^2-z^2)^2$; d) $(-\sqrt{3}-2x)^2$.

$(a+b)^2=(b+a)^2$

$(a-b)^2=(b-a)^2$

4. *Investigați!* *Adevărat* sau *Fals*?

Pentru orice numere reale a, b, x, y:

a) $(a+b)^2=a^2+b^2$; b) $(x+3)^2=x^2-6x+9$;

c) $(5-x)=x^2-10x+25$; d) $(x-y)^2=(y+x)^2$.

5. *Lucrați în perechi!* Completați astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

a) $(\sqrt{3}+2x)^2=\square+4\sqrt{3}x+\bigcirc$;

b) $(2{,}5x+\sqrt{2}y)^2=\square+2\cdot\square\cdot\bigcirc+2y^2$;

c) $(a^2-2b^3)^2=\square-4\cdot\square\cdot\bigcirc+4b^6$;

d) $(t^2-\sqrt{3}z^4)^2=\square-2\cdot\square\cdot\bigcirc+3z^8$.

6. Efectuați:

a) $(x-\sqrt{11})^2$; b) $(-x-\sqrt{11})^2$; c) $(-x+\sqrt{11})^2$;

d) $(x+\sqrt{11})^2$; e) $(\sqrt{11}-x)^2$; f) $(\sqrt{11}+x)^2$.

Trageți concluziile.

7. Efectuați: a) $(x+5)(x-5)$;

b) $(a+\sqrt{7})(a-\sqrt{7})$;

c) $(25-b)(25+b)$;

d) $(\sqrt{30}-t)(\sqrt{30}+t)$.

$(-x+y)(x+y)=$
$=y^2-x^2$

8. *Investigați!* *Adevărat* sau *Fals*?

a) $(x+4)(x-4)=x^2-16$;

b) $(a-5)(a+5)=(a-5)^2$;

c) $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})=x^2-49$;

d) $(t-2)^2(t+2)^2=(t^2-4)^2$.

9. Completați astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

a) $(\square-t^2)(\square+t^2)=64z^2-t^4$;

b) $(\sqrt{3}a-b)(\square+b)=3a^2-b^2$;

c) $\left(\frac{1}{2}a-\square\right)\left(\frac{1}{2}a+\square\right)=\bigcirc-25b^4$;

d) $(0{,}3y+2x)(\square-\bigcirc)=0{,}09y^2-4x^2$.

10. Efectuați:

a) $(3x+1)^3$; b) $(2t+z^2)^3$; c) $(1+3x)^3$; d) $(z^2+2t)^3$.

$(a+b)^3=(b+a)^3$

11. Aflați volumul cubului cu muchiile de:

a) $(2+3\sqrt{5})$ cm; b) $(1+\sqrt{11})$ cm; c) $(10-2\sqrt{2})$ cm; d) $(5\sqrt{6}-10)$ cm.

12. Efectuați:

a) $(3t-2z)^3$; b) $(a^2-b^2)^3$; c) $(2z-3t)^3$; d) $(b^2-a^2)^3$.

13. *Lucrați în perechi!* Completați adecvat:

a) $1000x^3+y^3=(10x+y)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2)=(\square+\square)(\square-\square+\square)$;

b) $t^{12}+z^9=(t^{\square})^3+(z^{\square})^3=(\square+\bigcirc)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2)=(\square+\square)(\square-\square+\square)$.

14. *Lucrați în perechi!* Completați adecvat:

a) $729a^3-27b^3=\square^3-\bigcirc^3=(\square-\bigcirc)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2)=(\square-\square)(\square+\square+\square)$;

b) $1-64t^{15}=\square^3-\bigcirc^3=(\square-\bigcirc)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2)=(\square-\square)(\square+\square+\square)$.

☐ **2** ☐

15. Calculați: a) $(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2-(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$;

b) $(2\sqrt{5}+\sqrt{2})^2-(2\sqrt{5}-\sqrt{2})^2+(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

16. Calculați mintal:

a) 31^2; b) 51^2; c) 49^2; d) 99^2; e) 26^2; f) 101^2.

17. Calculați mintal:

a) $19\cdot 21$; b) $98\cdot 102$; c) $1004\cdot 96$; d) $45\cdot 55$.

18. Aflați aria pătratului cu laturile de:

a) $(10+2\sqrt{5})$ cm; b) $(3+\sqrt{15})$ cm;

c) $(25-2\sqrt{5})$ cm; d) $(100-5\sqrt{8})$ cm.

19. Aflați aria dreptunghiului cu dimensiunile:

a) $(8-2\sqrt{5})$ cm și $(8+2\sqrt{5})$ cm;

b) $(10+\sqrt{10})$ cm și $(10-\sqrt{10})$ cm.

20. Fie $x=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ și $y=\sqrt{15}-1$. Calculați valoarea expresiei $(x^2+y^2-23)^{2008}$.

21. Fie $x=\sqrt{6}+1$ și $y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Calculați valoarea expresiei $(x^2-y^2-2)^{2007}$.

22. *Lucrați în perechi!* Aflați media aritmetică și media geometrică a numerelor:

a) $(\sqrt{2999}-1)^2$ și $(\sqrt{2999}+1)^2$;

b) $(\sqrt{109}+1)^2$ și $(\sqrt{109}-1)^2$.

Model:

Media geometrică a numerelor $a\geq 0$ și $b\geq 0$ este $\sqrt{ab}$.

Fie $a=2{,}5$ și $b=10$. Atunci $\sqrt{ab}=\sqrt{2{,}5\cdot 10}=\sqrt{25}=5$.

23. Completați adecvat:

a) $(\square+x^2)^3=8y^6+3\square^2\bigcirc+3\square\bigcirc^2+\bigcirc^3=$

$=\square+\square+\square+\square$;

b) $(ab+\bigcirc)^3=a^3b^3+6\square^2d+12\square d^2+\bigcirc^3=$

$=\square+\square+\square+\square$.

24. Efectuați:

a) $(x+2y^{-2})^3$; b) $(a^{-3}+ab^2)^3$;

c) $\left(a^2+\frac{3}{4}b\right)^3$; d) $(\sqrt{3}x^3+y^2)^3$.

25. Completați adecvat:

a) $(\square-b^3)^3=64a^{12}-3\square^2\bigcirc+3\square\bigcirc^2-\bigcirc^3=$

$=\square-\square+\square-\square$;

b) $(t^{-3}-\bigcirc)^3=\square^3-3\square^2\cdot z^3+3\square\bigcirc^2-\bigcirc^3=$

$=\square-\square+\square-\square$.

26. Efectuați:

a) $(a^2b^2-a^5)^3$; b) $(0{,}2t^2-z^4)^3$;

c) $(x^{-3}-3y^2)^3$; d) $(\sqrt{5}t^2-zt)^3$.

27. Factorizați:

a) $1000t^6z^6+t^{12}$; b) $a^9b^9+1728a^{15}$.

28. Factorizați:

a) $t^9-27t^{12}z^{-12}$; b) $1331a^6-64b^3$.

29. Efectuați: a) $(x+y+3)^2$; b) $(5-\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$;
c) $(a+b)^4$; d) $(a-b)^4$.

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

30. *Investigați!*
a) Efectuați: $(4m)^2$; $(4m+1)^2$; $(4m+2)^2$; $(4m+3)^2$.
b) Arătați că restul împărțirii unui număr natural pătrat perfect la 4 este 0 sau 1.

31. a) Efectuați: $(5k)^2$; $(5k+1)^2$; $(5k+2)^2$; $(5k+3)^2$.
b) Care poate fi restul împărțirii unui număr natural pătrat perfect la 5?

32. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $(x+2)^2-x^2=6$; b) $(2y-1)^2-4y^2=10$.

☐ ☐ **3**

33. Demonstrați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}^*$ valoarea expresiei $3a^2-4ab+3b^2$ este pozitivă.

34. Scrieți expresia $2t^2+2z^2$ ca sumă a două pătrate.

35. *Problema lui Bhaskara II, matematician și astronom indian (hindus).*
Demonstrați că
$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$


Bhaskara II
(1114–1185)

36. *Investigați!*
Este rațional sau irațional numărul $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}$?

37. Demonstrați că:
a) suma 11^3+19^3 este divizibilă cu 30;
b) suma 19^3+13^3 nu este un număr prim;
c) diferența 83^3-13^3 este divizibilă cu 10 și cu 7;
d) diferența 87^3-36^3 se divide cu 17.

38. Se știe că $A+\frac{1}{A}=2$. Calculați:
a) $A^2+\frac{1}{A^2}$; b) $A^3+\frac{1}{A^3}$.

• *Problemă pentru campioni*

39. Demonstrați că diferența n^5-n^3, $n \in \mathbb{N}$, este divizibilă cu 6.

§3. Metode de descompunere în factori

3.1. Metoda factorului comun

• Scrieți ca produs de factori, folosind factorul comun, expresia $8x^2y^3-12xy^5$.

Rezolvare:

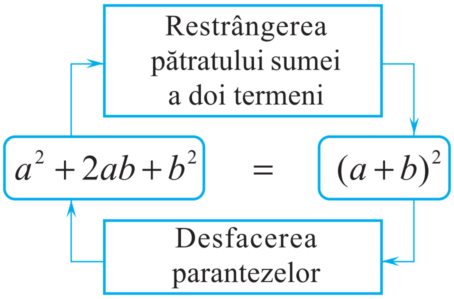
$$8x^2y^3-12xy^5=$$
$$\downarrow$$
$$=\left\{\begin{matrix}8x^2y^3:4xy^3=\square\,x^{\square}\\ 12y^5:4xy^3=\square\,y^{\square}\end{matrix}\right\}=$$
$$\downarrow$$
$$=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Factorul comun}}}{4xy^3}(2x^{\square}-3y^{\square}).$$

① Aflăm c.m.m.d.c. al coeficienților 8 și 12:
$(8,12)=4$.

② Determinăm cel mai mic exponent al puterii fiecărui factor comun din părțile literale:
$x \longrightarrow \min(2, 1)=1$.
$y \longrightarrow \min(3, 5)=3$.

③ Scoatem factorul comun $4xy^3$. În paranteze rămâne rezultatul împărțirii fiecărui termen la $4xy^3$.

3.2. Aplicarea formulelor de calcul prescurtat



1 Observați și completați adecvat:

a) $a^2+6ab+\bigcirc^2=(a+\bigcirc)^2$;

b) $\square^2+2\sqrt{2}xy+y^2=(\square+y)^2$.

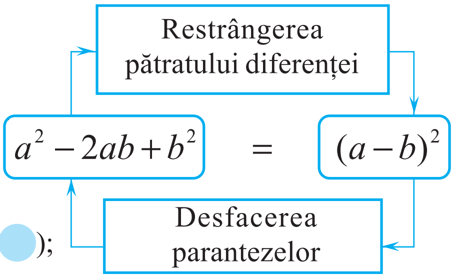
2 Examinați și trageți concluzia:

a) $x^2-8xy+16y^2=(x-4y)^2$;

b) $3a^2-4\sqrt{3}ab+4b^2=$

$=(\sqrt{3}a)^2-2(\sqrt{3}a)(2b)+(2b)^2=$

$=(\square-\bigcirc)^2$.



Lucrați în perechi

3 Observați și completați:

a) $9a^2-25b^2=(3a)^2-(5b)^2=(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)$;

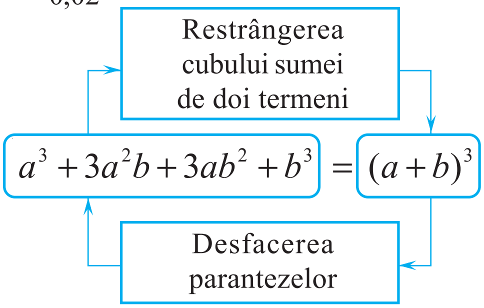
b) $3x^2-\frac{y^4}{4}=(\sqrt{3}x)^2-\left(\frac{y^2}{2}\right)^2=(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)$.

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

- Completați propoziția:

Diferența pătratelor este egală cu...

- Calculați mintal: $\frac{2{,}01^2-1{,}99^2}{0{,}02}=\frac{(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)}{0{,}02}$.



4 Observați și completați:

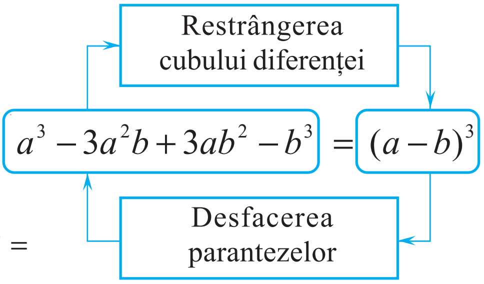
a) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3=$

$=x^3+3\cdot x^2\cdot(2y)+3\cdot x\cdot(2y)^2+(2y)^3=$

$=(\square+\bigcirc)^3$;

b) $27a^3+3\cdot\square^2\cdot\bigcirc+3\cdot\square\cdot\bigcirc^2+125=$

$=(\square+\bigcirc)^3$.



Lucrați în perechi

- Examinați și completați adecvat:

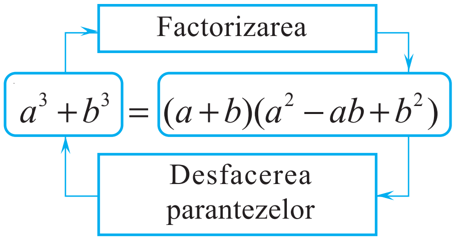
a) $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3=$

$=a^3-3\cdot\square^2\cdot\bigcirc+3\cdot\square\cdot\bigcirc^2-\bigcirc^3=$

$=(\square-\bigcirc)^3$;

b) $0{,}001x^3-3\cdot\square^2\cdot\bigcirc+3\cdot\square\cdot\bigcirc^2-125y^3=$

$=(\square-\bigcirc)^3$.



5 Descompuneți în factori suma cuburilor:

a) $a^3+125b^3=(2a)^3+(5b)^3=$

$=(\square+\bigcirc)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2)$;

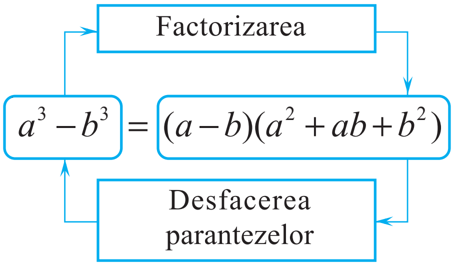
b) $64+x^3y^3=\square^3+\bigcirc^3=\ldots$

6 Descompuneți în factori diferența cuburilor:

a) $1000-8t^3=\square^3-\bigcirc^3=$

$=(\square-\bigcirc)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2)$;

b) $a^6b^6-27a^3=\square^3-\bigcirc^3=\ldots$



Factorizarea

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Desfacerea parantezelor

3.3. Metoda grupării termenilor

- Descompuneți în factori aplicând metoda grupării:

a) $m^3-\sqrt{3}m^2+5m-5\sqrt{3}$;

b) $an+pa-bn-pb$.

Rezolvare:

a) $m^3-\sqrt{3}m^2+5m-5\sqrt{3}=(m^3-\sqrt{3}m^2)+(5m-5\sqrt{3})=$

$=m^2(m-\sqrt{3})+5(m-\sqrt{3})=(m-\sqrt{3})(m^2+5)$.

b) $an+pa-bn-pb=(\square+\square)-(\square+\square)=$

$=\square\cdot(\square+\square)-\square\cdot(\square+\square)=(\square+\square)\cdot(\square-\square)$.

Rețineți

Pentru a descompune o expresie în factori utilizând metoda grupării:
- grupăm termenii expresiei, astfel încât să determinăm factorul comun;
- scriem expresia ca produs utilizând proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare (scădere).

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Restrângeți ca pătrat al unei sume (diferențe):

a) $x^2-10x+25$; b) $16a^2-8a+1$;

c) $36a^2b^2+12ab+1$; d) $x^2+16x+64$;

e) $64x^2y^2-16xy+1$; f) $1+18x+81x^2$.

2. *Investigați!* *Adevărat* sau *Fals*?

a) $x^2-2x+4=(x-2)^2$;

b) $x^2-12x+36=(x-6)^2$;

c) $4a^2+8ab+b^2=(2a+b)^2$;

d) $a^2+0{,}4a+0{,}04=(0{,}04+a)^2$.

A/F

3. Efectuați:

a) $100x^2-y^2=(10\square-\bigcirc)(10\square+\bigcirc)$;

b) $1-64a^2b^2=(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)$;

c) $2-16x^4=(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)$;

d) $3a^6-225a^2b^4=(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)$.

4. *Lucrați în perechi!* Restrângeți completând adecvat:

a) $1+3x+3x^2+x^3$;

b) $64a^3+48a^2b+12ab^2+b^3$;

c) $1000+\square t+\square t^2+\bigcirc^3=(\square+t)^3$;

d) $x^3+\square y+\square y^2+\bigcirc^3=(\square+2y)^3$.

5. Descompuneți în factori folosind factorul comun:

a) $26xy-39z$; b) $-121x^2y+11xy^2$;

c) $12{,}5a^3b^2-2{,}5a^4b^2$; d) $2\sqrt{2}t^2-\sqrt{50}t$.

6. Descompuneți în factori suma cuburilor:

a) $(6a)^3+(a^3b)^3$; b) $(5x^2)^3+(x^4y)^3$; c) $(3t)^3+(tz)^3$.

7. Descompuneți în factori diferența cuburilor:

a) $(ab)^3-(a^2)^3$; b) $(t^5)^3-(2tz)^3$; c) $(x^2y)^3-(xy^2)^3$.

8. Descompuneți în factori utilizând metoda grupării:

a) $a^3+\sqrt{5}a^2-7a-7\sqrt{5}$; b) $3x^2y-xy^2-6x+2y$.

☐ **2** ☐

9. Scrieți ca produs de trei factori:

a) $t(z+1)^2 - t(z-1)^2$; b) $a^3 - ab^2$;

c) $(x^2+5)^2 - 6(x^2+5)$; d) $xy\cdot(x^2+y^2)^2 - 4x^3y^3$.

10. Descompuneți în factori:

a) $x^2 - 4x + 3$; b) $x^2 + 10x + 24$;

c) $a^2 + ab - 3a - 3ab$; d) $a^2b^2 - 5a^2b + 6a^2$.

11. ***Investigați!*** Găsiți greșeala în raționamentele de mai jos.

Sofismul *Orice număr este egal cu jumătatea sa.*

Considerăm numerele egale a și b. Înmulțim ambii membri ai egalității $a = b$ cu a și din ambii membri scădem b^2. Obținem $a^2 - b^2 = ab - b^2$, sau $(a-b)(a+b) = b(a-b)$. Împărțind ambii membri la $a-b$, obținem $a+b=b$. Cum $b=a$, obținem $a+a=a$, sau $2a=a$, de unde $a=\frac{1}{2}a$.

12. ***Investigați!*** Găsiți greșeala.

Sofismul *Toate numerele sunt egale între ele.*

Fie numerele m și n și identitatea

$$m^2 - 2mn + n^2 = n^2 - 2mn + m^2.$$

Atunci $(m-n)^2 = (n-m)^2$. Extragem rădăcina pătrată din ambii membri ai egalității și obținem $m-n=n-m$, sau $2m=2n$. Deci, $m=n$.

13. ***Lucrați în perechi!*** *Problemă din India antică*

Dacă înmulțim un număr cu 3, apoi împărțim numărul obținut la 5 și mărim rezultatul cu 6, iar din ultimul număr extragem rădăcina pătrată, apoi din numărul obținut scădem 1 și ridicăm rezultatul la pătrat, obținem 4. Aflați acest număr.

Indicație. Utilizați metoda drumului invers.

14. Scrieți numărul ca diferență de pătrate de numere naturale: a) 13; b) 17; c) 20; d) 60; e) 1001.

15. a) Determinați cea mai mică valoare a expresiei $x^2 - 4x + 4$ pentru $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați cea mai mică valoare a expresiei $x^2 + 8x + 20$ pentru $x \in \mathbb{R}$.

c) Determinați cea mai mare valoare a expresiei $-x^2 + 6x - 9$ pentru $x \in \mathbb{R}$.

d) Determinați cea mai mare valoare a expresiei $-x^2 - 20x - 105$ pentru $x \in \mathbb{R}$.

16. ***Lucrați în perechi!*** Arătați că numărul este pătrat perfect:

a) $\overline{a4}\cdot\overline{a6}+1$, dacă a este cifră nenulă;

b) $\overline{a7}\cdot\overline{a5}+1$, dacă a este cifră nenulă.

Model:
$\overline{ab} = 10a + b$;
$\overline{3b} = 30 + b$.

17. Descompuneți în factori: a) $27x^{-3} + 64x^{-6}y^3$; b) $512t^{12} + 0{,}001t^3z^6$.

18. Descompuneți în factori: a) $8t^{12}z^{-6} - t^3z^{-9}$; b) $729a^{21}b^9 - 0{,}008a^{15}$.

19. Pătratul sumei a două numere naturale consecutive este cu 264 mai mare decât suma pătratelor lor. Aflați aceste numere.

20. Arătați că $2(a^2+b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$.

☐ ☐ **3**

21. Determinați numerele reale x și y știind că:

a) $x^2 + 6x + 4y^2 - 4y + 10 = 0$;

b) $0{,}16x^2 + 0{,}8x + y^2 - 2y + 2 = 0$.

22. Arătați că numărul este pătrat perfect:

a) $(t^2+t)(t^2+t+2)+1$, $t \in \mathbb{Z}$;

b) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$, $x \in \mathbb{Z}$.

23. Demonstrați că, oricare ar fi numerele reale nenegative a și b, este adevărată inegalitatea $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (inegalitatea mediilor).

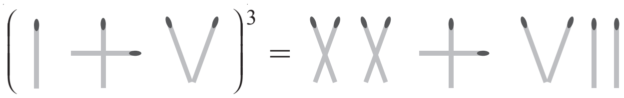
24. Demonstrați că dacă suma a două numere este divizibilă cu un număr, atunci și suma cuburilor acestor numere este divizibilă cu numărul respectiv.

25. ***Matematică distractivă***

Schimbați poziția:

a) unui chibrit pentru a obține o egalitate adevărată:

b) a două chibrituri pentru a obține o egalitate adevărată:



§4. Transformări identice ale expresiilor

1 Determinați pentru care valori ale variabilei x este adevărată egalitatea:

$$(2x+1)^2-2(2x^2+x+1)=2x-1.$$

Explicăm

Fie $A=(2x+1)^2-2(2x^2+x+1)$ – partea stângă a egalității, iar $B=2x-1$ – partea dreaptă a egalității.

Transformăm partea stângă:

$A=(2x+1)^2-2(2x^2+x+1)=4x^2+4x+1-4x^2-2x-2=2x-1.$

Obținem $A=B$, adică $2x-1=2x-1$. Tragem concluzia că egalitatea este adevărată pentru orice valoare a variabilei x.

În astfel de cazuri se spune că egalitatea este o **identitate**.

Definiție

> **Identitate** se numește egalitatea a două expresii, adevărată pentru toate valorile admisibile ale variabilelor pentru care expresiile au sens.

Exemple

1. Expresiile $3(a+b)$ și $3a+3b$ sunt identice deoarece egalitatea $3(a+b)=3a+3b$ este adevărată pentru orice valori ale lui a și b.

Deci, egalitatea $3(a+b)=3a+3b$ este o identitate.

2. Egalitatea $5(x+y)=5x+y$ nu este o identitate, deoarece există valori ale variabilelor x și y pentru care egalitatea nu este adevărată. De exemplu, pentru $x=1$ și $y=1$. Verificați!

Exemple de identități deja cunoscute:

– proprietățile adunării și înmulțirii
$a+b=b+a$
$a(b+c)=ab+ac$ ş. a.

– proprietățile puterii
$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$
$(a^n)^m=a^{nm}$ ş. a.

– proprietățile rădăcinii pătrate
$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b},\ a\geq 0,\ b\geq 0$
$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ a\geq 0,\ b>0$ ş. a.

– formulele înmulțirii prescurtate tot sunt identități
$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ş. a.

– identități sunt și egalitățile numerice adevărate
$5\cdot(\sqrt{3}-2)=5\cdot\sqrt{3}-5\cdot 2$
$3^2+4^2=5^2$ etc.

2 Examinați și completați.

Demonstrați identitatea:

a) $10x+2(3y-2x)=6(x+y)$.

Explicăm

Transformăm expresia din partea stângă a egalității

$10x+2(3y-2x)=10x+6y-4x=6x+6y=6(x+y).$

Obținem: $\underbrace{6(\square+\square)}_{\text{partea stângă}}=\underbrace{6(\square+\square)}_{\text{partea dreaptă}}$

Deci, egalitatea este o identitate, c.t.d.

b) $4(a+b+c)+5(a-c)=4(b-c)+9a-5c.$

Rezolvare:

Fie A expresia din partea stângă, iar B – expresia din partea dreaptă a egalității.

Transformăm partea stângă:

$$A=4(a+b+c)+5(a-c)=4\square+4\square+4\square+5\square-5\square=\square a+\square b-\square c.$$

Transformăm partea dreaptă:

$$B=4(b-c)+9a-5c=4\square-4\square+9\square-5\square=\square a+\square b-\square c.$$

Obținem $A=B$ pentru orice valori ale variabilelor a, b, c.

Deci, egalitatea $A=B$ este o identitate, c.t.d.

În procesul de demonstrație a identităților s-a efectuat transformări ale expresiilor numite **transformări identice**.

Definiție

Transformarea expresiei într-o expresie identică cu ea se numeşte **transformare identică**.

3 Examinați şi completați.

Aduceți expresia $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$ la forma cea mai simplă, dacă $a\neq -b$.

Rezolvare:

Efectuăm transformări identice ale expresiei în mulțimea valorilor admisibile ale variabilelor a şi b, adică pentru $a\neq -b$. (Argumentați!)

$$\text{Obținem } \frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}=\frac{\square^2-\square^2}{(\square+\square)^2}=\frac{(\square+\square)(\square-\square)}{(\square+\square)^2}=\underbrace{\frac{\square-\square}{\square+\square}}_{\text{forma cea mai simplă}}.$$

Rețineți

– Identitățile se demonstrează.

– Sunt aplicabile următoarele modalități de demonstrație a identităților:

1) se efectuează transformări identice cu partea stângă a egalității. Dacă în rezultat obținem partea dreaptă, atunci identitatea este considerată demonstrată.

2) se efectuează transformări identice cu partea dreaptă a egalității. Dacă în rezultat obținem partea stângă, atunci identitatea este considerată demonstrată.

3) se efectuează transformări identice atât cu partea stângă, cât şi cu partea dreaptă. Dacă se obține acelaşi rezultat, atunci identitatea este considerată demonstrată.

4) se scade partea stângă din partea dreaptă sau partea dreaptă din partea stângă. Dacă în rezultat se obține zero, atunci identitatea este considerată demonstrată.

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Determinați dacă egalitatea este identitate:

a) $x+y=y+x$; b) $x\cdot 0=x$; c) $2x-2y=2(x-y)$; d) $2a+1=2(a+1)$.

2. ***Lucrați în perechi!*** Completați astfel încât egalitatea să fie identitate:

a) $3n+3m=\square(n+m)$; b) $x^2-y^2=(\square+\square)(\square-\square)$;

c) $a+b+c=a-(\square-\square)$; d) $5(x+\sqrt{3})=\square+\square$.

3. Argumentați de ce egalitatea nu este identitate.

a) $6a-1=5a$; b) $2mn-n=2n$;

c) $8a-1=8(a-1)$; d) $x-y=2x-y$.

4. Efectuați transformările identice.

a) $n-(2n-m)$; b) $2(x-5)+3x$;

c) $3(a+1)+2a-8$; d) $-(1-3m)+m-n+1$.

5. ***Lucrați în perechi!*** Reduceți termenii asemenea.

a) $2(3x-1)-6(x-2)$;

b) $2n+n(m-2)+m(n+m)+8$;

c) $(2{,}5a-8{,}1b)-(1{,}9b+4{,}5a)$;

d) $9t-[8t-(3t+1)]$.

☐ **2** ☐

6. Determinați identitatea:

a) $8(1{,}3x+0{,}25)-6{,}6x=3{,}8x+2$; b) $(-a-b)(a+b)=-(a+b)^2$; c) $(a+1)^3-(a+1)=a(a+1)(a+2)$.

7. Este oare identitate egalitatea:

a) $3(m+n-2)+4(m-2n)=7m+5(n+5)$; b) $6(1{,}2t-0{,}5)-1{,}3t=5{,}9t-3$;

c) $\frac{1}{2}(x-7)+1=\frac{3(1-x)}{4}$; d) $x^2+2x-y^2+2y=(x+y)(x-y+2)$?

8. ***Lucrați în grup!*** Efectuați transformările identice şi aduceți expresia la forma cea mai simplă.

a) $(3x-4y)(4x+y)-(5x-y)(2x+2y)$; b) $(3n+m)(m-3n)$;

c) $(3x+4)^2-(2x+1)(2x-1)$; d) $2(t+1)^2-4t$;

e) $4x(x-2)-(x-4)^2$; f) $(z-2)(z+3)-(z-1)^2$.

9. Fie expresia:

a) $E(a)=\frac{a^2-64}{a+8}$; b) $E(x)=\frac{25-x^2}{5-x}$;

c) $E(t)=\frac{2t-20}{100-t^2}$; d) $E(x)=\frac{x^2-36}{(6-x)^2}$.

1) Determinați pentru care valori ale variabilei expresia nu are sens.

2) Aduceți expresia la forma cea mai simplă în mulțimea valorilor admisibile ale variabilei.

☐ ☐ **3**

10. Demonstrați identitatea:

a) $(m-n)(m+n)[(m-n)^2+(m+n)^2]=2(m^4-n^4)$; b) $(n-2)(n-1)n(n+1)+1=(m^2-n-1)^2$.

11. Fie expresia $E(x)=\frac{2a-2c+ax-cx}{x^2-4}$.

a) Determinați pentru care valori ale lui x expresia $E(x)$ nu are sens.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă în mulțimea valorilor admisibile ale lui x.

Exerciții și probleme recapitulative

1 ☐ ☐

1. Reduceți termenii asemenea, efectuând transformări identice:

a) $6xy-3x\sqrt{y}+1{,}5xy+25+3x\sqrt{y}$;

b) $-0{,}25a^2b^3+5(3a^2b^3-ab)+1{,}4ab-0{,}7$;

c) $(2a-1)^2-(3a+4)^2$.

2. ***Investigați!*** *Adevărat* sau *Fals*?

a) $6x-y=-(y-6x)$;

b) $\sqrt{(a+b)^2}=a+b$;

c) $(3t+z)^3=27t^3+z^3$.

A/F

3. *Lucrați în perechi!*

Completați tabelul:

a	b	$(a+b)^2$	$(a-b)^2$	a^2-b^2	$(a+b)^3$	$(a-b)^3$	a^3-b^3	a^3+b^3
1	$8x^3$							
t^6	$-z^3$							
$27x^{-3}$	y^6							
$(ab)^3$	$64b^{12}$							

4. Aflați valoarea expresiei:

a) $(x+1)(x^2-x+1)-x^3$, dacă $x=9{,}73$;

b) $(x-2)(x^2+2x+4)+8$, dacă $x=2$.

5. Descompuneți în factori folosind diverse metode:

a) x^2-25; b) $4-81t^2$;

c) $8+a^3$; d) c^3+8x^3.

6. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $(a^3-1)(a^6+a^3+1)$; b) $(m-1)(m^2+m+1)$.

7. Aduceți la forma cea mai simplă, efectuând transformări identice:

a) $(a+5)^2-(a+7)(a-7)-35$;

b) $(b-3)(b+3)-(b-6)^2+20$.

☐ **2** ☐

8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $4x^2-25=0$; b) $\frac{1}{4}z^2-16=0$;

c) $0{,}36-x^2=0$; d) $0{,}01t^2-1=0$.

9. Demonstrați identitatea:

a) $a^2+3a+2=(a+1)(a+2)$;

b) $c^2-7c+10=(c-2)(c-5)$;

c) $x^2-x+\frac{1}{4}=(x-\frac{1}{2})^2$.

10. *Lucrați în perechi!* Completați pentru a obține pătratul unei sume sau al unei diferențe:

a) $9x^2+x+\bigcirc=(\square+\bigcirc)^2$;

b) $t^2+\boxed{}+\frac{1}{4}=(\square+\bigcirc)^2$;

c) $9x^2-\boxed{}+16=(\square-\bigcirc)^2$.

11. Demonstrați identitatea:

a) $5+2\sqrt{6}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$; b) $7+2\sqrt{6}=(1+\sqrt{6})^2$;

c) $11-6\sqrt{2}=(3-\sqrt{2})^2$; d) $7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$.

12. *Investigați!* Aflați greșeala.

Sofismul „$2\times2=5$”.

Fie egalitatea adevărată $16-36=25-45$. Adunând la ambii membri ai egalității $\frac{81}{4}$,

obținem $16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4}$

sau $16-2\cdot\frac{9}{2}\cdot4+\frac{81}{4}=25-2\cdot\frac{9}{2}\cdot5+\frac{81}{4}$.

De unde $\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$ sau $4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$. Deci, 4 = 5 sau „$2\times2=5$”.

13. Demonstrați că:

a) $198\,|\,(321^3-123^3)$; b) $111\,|\,(321^3+123^3)$.

14. Demonstrați că ultimele trei cifre ale numărului 2992^3+8^3 sunt zerouri.

15. *Lucrați în grup!* Descompuneți în factori:

a) $a-b+b^2-a^2$; b) x^2-x-y^2-y;

c) $x+y-x^3-y^3$; d) a^3-b^3+b-a.

16. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\frac{x-1}{x^2-x+1}-\frac{2x-2}{x^3+1}$; b) $\frac{2x+1}{x^3-1}-\frac{x}{x-1}+1$.

17. Descompuneți în factori:

a) $64x^3-(x-1)^3$; b) $\frac{1}{8}t^3+(1+\frac{1}{2}t)^3$; c) $1-(z+1)^6$.

18. Calculați $a^2+\frac{1}{a^2}$, dacă se știe că $a-\frac{1}{a}=10$.

19. Arătați că valoarea expresiei $(2\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+2)^2$ este un număr natural.

20. Formulați exemple de utilizare a numerelor reale reprezentate prin litere și a formulelor de calcul prescurtat în diverse domenii.

☐ ☐ **3**

21. Demonstrați că: a) $71 \mid (8^8 + 8^7 - 8^6)$; b) $43 \mid (7^{10} - 7^9 + 7^8)$.

22. a) Arătați că diferența pătratelor a două numere impare consecutive este divizibilă cu 8.
b) Arătați că diferența pătratelor a două numere pare consecutive nu este divizibilă cu 8.

23. Scrieți ca sumă de pătrate expresia $x^2 + y^2 + x - 4y + 7\frac{1}{4}$.

24. Aflați $\left(a^{-6} + \frac{1}{a^{-6}}\right)^3$, dacă $a + \frac{1}{a} = 5$.

• Probleme pentru campioni

25. Demonstrați că:
a) $83^4 - 83^3$ este număr par;
b) $37^4 - 37^3$ este număr impar;
c) $53^7 - 53^6$ este divizibil cu 26;
d) $17^3 - 17^2$ este pătrat perfect;
e) $79^6 + 79^5$ este multiplul lui 80;
f) $11^4 + 11^2$ este multiplul numerelor 121 şi 122.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

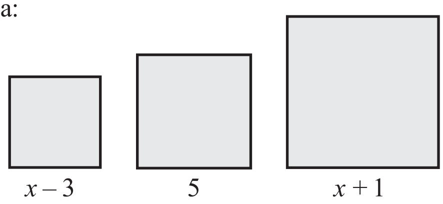
Varianta 1

1. Completați astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$$36t^2 - \ldots + 4 = (\square - \bigcirc)^2.$$

2. Descompuneți în factori: $(x+1)^3 - (x-2)^3$.

3. Aflați valoarea reală a lui x, astfel încât suma ariilor primelor două pătrate să fie egală cu aria pătratului al treilea:



4. Un vas are forma unui cub cu muchiile de $(30 + 4\sqrt{5})$ cm.
a) Determinați dacă vor încăpea în acest vas 60 litri de apă.
b) Aflați de câtă vopsea (în kilograme) e nevoie pentru a vopsi vasul (fețele laterale exterioare ale cubului), dacă pentru 1 m² se utilizează 120 g de vopsea. Rotunjiți răspunsul până la zecimi.

5. Demonstrați că numărul $4^{2n} + 2^{2n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, este pătrat perfect.

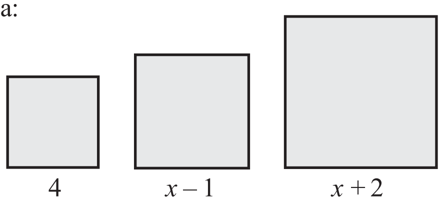
Varianta 2

1. Completați astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$$9 + \ldots + 25z^4 = (\square + \bigcirc)^2.$$

2. Descompuneți în factori: $(y-3)^3 + (y+1)^3$.

3. Aflați valoarea reală a lui x, astfel încât suma ariilor primelor două pătrate să fie egală cu aria pătratului al treilea:



4. Un vas are forma unui cub cu muchiile de $(40 - 5\sqrt{3})$ cm.
a) Determinați dacă vor încăpea în acest vas 30 litri de apă.
b) Aflați de câtă vopsea (în kilograme) e nevoie pentru a vopsi vasul (fețele laterale exterioare ale cubului), dacă pentru 1 m² se utilizează 150 g de vopsea. Rotunjiți răspunsul până la zecimi.

5. Demonstrați că numărul $4^n - 2^{2n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, este pătrat perfect.

Capitolul 3 Ecuații și inecuații. Sisteme

> *Matematica este limbajul universului. Deci, cu cât ştii să rezolvi mai multe ecuații, cu atât poți conversa mai mult cu cosmosul.*
>
> Neil de Grasse Tyson

§1. Ecuații de gradul I cu o necunoscută

1.1. Ecuații cu o necunoscută

1 Andrei avea pe contul telefonului său 12 lei. După reîncărcare, în cont sunt 72 de lei. Cu câți lei şi-a reîncărcat contul Andrei, dacă pentru fiecare suplinire a contului el primeşte suplimentar 20 % din valoarea de reîncărcare?

Rezolvăm Fie contul a fost completat cu x lei. Atunci, pe cont vor fi:

$\boxed{12+x+0{,}2x=72} \Leftrightarrow x+0{,}2x=72-\square \Leftrightarrow \square\, x=\square \Leftrightarrow x=\square$.

Răspuns: $\square$ lei.

Definiție Egalitatea de forma $A(x)=B(x)$, unde $A(x)$ şi $B(x)$ sunt expresii ce conțin necunoscuta x, se numeşte **ecuație cu o necunoscută**.

$x^2+2x-3=0$ $\quad$ $5-x=2x+14$ $\quad$ $\dfrac{x}{|x|}=1$ $\quad$ $\sqrt{x}+5=0$

Rețineți

- Valoarea x_0 care transformă ecuația $A(x)=B(x)$ într-o propoziție adevărată se numeşte **soluție** a acestei ecuații.
- A **rezolva ecuația** înseamnă a afla mulțimea soluțiilor ei.
- Mulțimea soluțiilor ecuației se notează, de regulă, cu S.

La rezolvarea ecuațiilor se aplică ***relațiile de egalitate în mulțimea*** $\mathbb{R}$:

Dacă $a=b,\ a, b\in\mathbb{R}$, atunci:

1° $a+c=b+c,\ c\in\mathbb{R}$; $\qquad$ 2° $a-c=b-c,\ c\in\mathbb{R}$;

3° $ac=bc,\ c\in\mathbb{R}^*$; $\qquad$ 4° $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c},\ c\in\mathbb{R}^*$.

Examinați şi completați:

$x^2+2x-3=0$

$x=-3$ — $(-3)^2+2\cdot(-3)-3=0$ – $\boxed{A}$
$x=-3$ – soluție a ecuației.

$x=1$ — $\square^2+2\cdot\square-3=0$ – $\boxed{A}$
$x=1$ – $\square$

Rețineți O ecuație cu o necunoscută, în mulțimea indicată, poate să nu aibă soluții; poate să aibă o mulțime finită sau infinită de soluții.

2 Examinați şi formulați exemple de ecuații pentru fiecare dintre următoarele cazuri:

Nu are soluții în ℝ.		Are o mulțime infinită de soluții în ℝ.		Are o mulțime finită de soluții în ℝ.	
$\sqrt{x}+5=0$		$\frac{x}{\lvert x\rvert}=1$		$5-x=2x+4$	
$S=\varnothing$	$S=\varnothing$	$S=\mathbb{R}_+^*$	$S=\square$	$S=\{\square\}$	$S=\{\square\}$

Definiție Ecuațiile se numesc **echivalente** dacă mulțimile lor de soluții sunt egale.

Rețineți Pentru a obține ecuații echivalente, se aplică următoarele transformări:

- Trecerea termenilor dintr-un membru al ecuației în celălalt, schimbându-le semnele în opuse.
- Reducerea termenilor asemenea în ambii membri ai ecuației.
- Înmulțirea/împărțirea ambilor membri ai ecuației cu/la un număr real nenul.

$$5-x=2x+14 \Leftrightarrow -2x-x=-5+14 \Leftrightarrow -3x=9 \Leftrightarrow x=-3$$

Definiție **Domeniul valorilor admisibile** (**DVA**) al ecuației cu o necunoscută se numeşte mulțimea valorilor necunoscutei pentru care au sens toate expresiile conținute în ambii membri ai acestei ecuații.

$\frac{x}{\lvert x\rvert}=1$
DVA: $x\in\mathbb{R}^*$

$x^2+2x-3=0$
DVA: $x\in\square$

$\sqrt{x}+5=0$
DVA: $x\in\square$

1.2. Ecuații de gradul I cu o necunoscută

1 În SUA, pentru măsurarea temperaturii se utilizează scara Fahrenheit, iar în Europa – scara Celsius. Formula de trecere de la o scară la alta este următoarea:

$$t_F=1{,}8\,t_C+32.$$

Aflați temperatura după scara Celsius, dacă pe scara Fahrenheit termometrul indică 68 °F.

Rezolvăm

Fie pe scara Celsius termometrul indică x °C. Atunci,

$$1{,}8x+32=68 \Leftrightarrow \underbrace{\boxed{1{,}8x-36=0}}_{\text{ecuație de gradul I cu o necunoscută}} \Leftrightarrow 1{,}8x=\square \Leftrightarrow x=\square.$$

Răspuns: $\square$ °C.

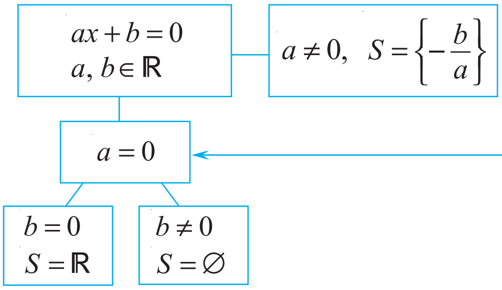
Definiție

Ecuația de forma $ax+b=0$, a, $b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, se numește **ecuație de gradul I cu o necunoscută**.

Rețineți

Ecuația de gradul I cu o necunoscută are o unică soluție: $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

2 Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $-3(x-1)+5x-4=2x$.



Rezolvăm

$-3(x-1)+5x-4=2x \Leftrightarrow$

$-3x+3+5x-4-2x=0 \Leftrightarrow$

$x(-3+5-2)=4-3$

$0\cdot x=1$ – ecuația nu are soluții.

Răspuns: Ecuația nu are soluții.

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. ***Investigați!*** Arătați că numărul –2 este soluție a ecuației:

a) $4x+5=x-1$; b) $x^2-4=0$.

2. ***Investigați!*** Care dintre numerele-elemente ale mulțimii $M=\left\{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 2\frac{1}{4}\right\}$ sunt soluții ale ecuației:

a) $\frac{9}{11}x+8=8$; b) $\frac{x+3}{2}=2$;

c) $\sqrt{x}=\frac{3}{2}$; d) $2(x+7)-15=2x-1$?

3. Determinați ecuațiile de gradul I din exercițiul **2**.

4. Aflați DVA al ecuației:

a) $\frac{2-x}{x}=3$; b) $x^2-1=0$;

c) $\sqrt{x}+2=6$; d) $3x+5=x+1$.

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $3-6x=2-4x$; b) $2x+(3-6x)=-17$;

c) $2(x+1)=3(x-1)$; d) $\frac{1}{5}(2x-1)=4$.

6. Rezolvați ecuația $\sqrt{3}x+2=8$:

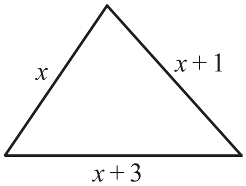
a) în mulțimea $\mathbb{R}$; b) în mulțimea $\mathbb{Q}$.

7. Rezolvați ecuația $\frac{x}{2}-\frac{3}{5}=0$:

a) în mulțimea $\mathbb{Q}$; b) în mulțimea $\mathbb{Z}$.

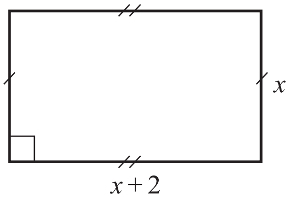
8. ***Lucrați în perechi!*** Aflați x utilizând datele din desen:

a)



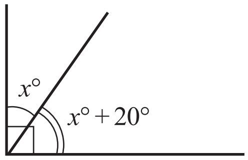
$\mathscr{P}=34$ cm

b)



$\mathscr{P}=16$ cm

c)



9. Asociați fiecare afirmație cu ecuația respectivă.

1) Numărul 12 este de 3 ori mai mare decât numărul x.
2) Media aritmetică a numerelor x și 11 este egală cu 25.
3) Numărul x este de 4 ori mai mare decât numărul 18.
4) Peste 4 ani Petru va avea 18 ani.
5) O latură a dreptunghiului este de 11 cm, iar perimetrul lui – de 25 cm.

Model: $1) \rightarrow b)$

a) $\frac{x}{4}=18.$
b) $3x=12.$
c) $(x+11)\cdot 2=25.$
d) $\frac{x+11}{2}=25.$
e) $x+4=18.$

10. Examinați și continuați rezolvarea:

a) $2(x-3)+4=8 \Leftrightarrow 2(x-3)=8-4 \Leftrightarrow \underline{\qquad} \Leftrightarrow \underline{\qquad} \Leftrightarrow x=\underline{\quad}.$
b) $6-0{,}5(1-x)=2 \Leftrightarrow 0{,}5(1-x)=\underline{\qquad} \Leftrightarrow \underline{\qquad} \Leftrightarrow \underline{\qquad} \Leftrightarrow x=\underline{\quad}.$

☐ 2 ☐

11. Pentru care valori reale ale necunoscutei x valoarea expresiei $25x-30$ este cu 5 mai mare decât valoarea expresiei $15x+35$?

12. Pentru care valori reale ale necunoscutei y valoarea expresiei $4y+6$ este de 6 ori mai mare decât valoarea expresiei $6y-15$?

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $5(3x-6)+4(3-2x)=5x-8;$
b) $9(x-3)-4(7-3x)=5-3x;$
c) $2\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}-3x\right)+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{3}-3x\right)=1;$
d) $\frac{15-x}{6}-\frac{2x+16}{5}=1.$

14. *Lucrați în grup!* Compuneți o ecuație cu o necunoscută, care are mulțimea soluțiilor:

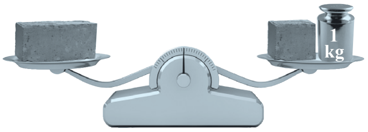
a) $S=\{4\};$ b) $S=\{-3\};$ c) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\};$
d) $S=\{\sqrt{5}\};$ e) $S=\{\sqrt{3}-1\};$
f) $S=\varnothing;$ g) $S=\mathbb{R}.$

15. *Investigați!* Este oare numărul 1,5 soluție a ecuației:
a) $x-1=|1-x|;$ b) $3-x=|-x|;$ c) $|-x|+1{,}5=0$?

16. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $|x|+1=5;$ b) $2|x|-1=|x|+6;$
c) $|x-3|=0;$ d) $|x+1|=-2.$

17. *Lucrați în perechi!*
Pe un taler al balanței se va pune o cărămidă și, pentru ca balanța să fie în echilibru, pe celălalt taler se vor pune greutatea de 1 kg și încă o jumătate de cărămidă. Cât cântărește o cărămidă?



18. O barcă cu motor parcurge o distanță în sensul cursului apei în 6 ore, iar la întoarcere, împotriva curentului apei, parcurge aceeași distanță în 10 ore. Aflați viteza apei, dacă viteza bărcii pe lac este de 16 km/h.

☐ ☐ 3

19. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $|2x-3|=7;$ b) $\sqrt{(7-2x)^2}=1;$
c) $|3(x-1)-1|=2;$ d) $|11-x|=x-11.$

20. Sergiu parcurge cu bicicleta distanța dintre două sate în 36 de minute, iar Eugeniu – în 45 de minute. Viteza cu care se deplasează Sergiu este cu 4 km/h mai mare decât viteza cu care se deplasează Eugeniu. Aflați viteza fiecărui biciclist și distanța dintre sate.

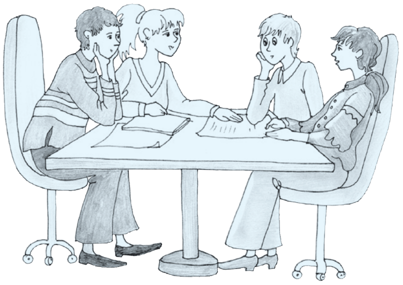
21. Andrei a cheltuit la supermarket $\frac{2}{7}$ din toți banii pe care i-a avut, iar 30% din rest – la librărie. Câți bani a avut Andrei, dacă i-au rămas 175 de lei?

22. *Lucrați în perechi!* Compuneți o problemă a cărei rezolvare se reduce la rezolvarea ecuației:

a) $3x=x+20;$ b) $\frac{x}{16}+1=\frac{x}{12};$
c) $(x+2)4=(x-2)6;$ d) $x-0{,}2=320.$

§2. Sisteme de ecuații de gradul I

2.1. Ecuații cu două necunoscute



La un maraton intelectual, echipele rezolvă probleme de matematică şi de fizică. Pentru fiecare problemă de fizică rezolvată corect echipa obține 3 puncte, iar pentru fiecare problemă de matematică rezolvată corect – 4 puncte. Se poate determina în mod univoc câte probleme de fizică şi câte de matematică a rezolvat echipa, dacă ea a acumulat în total 39 de puncte?

Explicăm

Fie au fost rezolvate corect x probleme de fizică şi y probleme de matematică. Atunci, obținem ecuația

$\boxed{3x+4y=39}$ ← ecuație cu două necunoscute

Definiție

Soluție a ecuației cu două necunoscute se numeşte perechea ordonată de numere $(x_0;\ y_0)$ care transformă această ecuație într-o propoziție adevărată.

$3x+4y=39$

Soluție a ecuației → (1; 9)

(1; 9)	$3\cdot\ 1\ +4\cdot\ 9\ =39$ – A	
(5; 6)	$3\cdot$ ☐ $+\ 4\cdot$ ☐ $=39$ – ☐	
(13; 1)	$3\cdot$ ☐ $+\ 4\cdot$ ☐ $=39$ – ☐	A/F
(☐; ☐)	$3\cdot$ ☐ $+\ 4\cdot$ ☐ $=39$ – ☐	

Ecuație cu două necunoscute

- $2x+5y=10$
  - (–2; 2,8)
  - (0; ☐)
  - (☐; –2)
- $x^2+y=5$
  - (–3; ☐)
  - (☐; 5)
- $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$
  - (3; ☐)
  - (☐; 1)
- $xy=-1$
  - $\left(-\frac{1}{3};\ \square\right)$
  - (☐; –1)

Rețineți

Ecuația cu două necunoscute poate să nu aibă soluții; poate să aibă o mulțime finită sau infinită de soluții.

- Nu are soluții.
  - $|x|+|y|=-2$
  - ☐
- Are o mulțime finită de soluții.
  - $x^2+y^2=0$
  - ☐
- Are o mulțime infinită de soluții.
  - $x-y=1$
  - ☐

Definiție

Domeniul valorilor admisibile (DVA) al ecuației cu două necunoscute se numeşte mulțimea valorilor necunoscutelor pentru care au sens toate expresiile din această ecuație.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$ → DVA: $x\in\mathbb{R}^*$, $y\in\mathbb{R}^*$.

2.2. Ecuații de gradul I cu două necunoscute

1 Anişoara doreşte să cumpere cu 60 de lei mere la prețul de 9 lei/kg şi pere la prețul de 15 lei/kg. Câte kilograme de mere şi câte kilograme de pere poate cumpăra Anişoara?

Explicăm

Fie Anişoara poate cumpăra x kg de mere şi y kg de pere. Atunci, obținem ecuația:

coeficienții necunoscutelor

$$\boxed{9x+15y=60}$$

termenul liber

necunoscutele

Definiție

Ecuația de forma $ax+by+c=0$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$, se numeşte **ecuație de gradul I cu două necunoscute**.

- Ecuația de gradul I cu două necunoscute are o mulțime infinită de soluții.
- Pentru a afla soluția ecuației de gradul I cu două necunoscute, se atribuie uneia dintre necunoscute orice valoare şi apoi se află valoarea corespunzătoare a celeilalte necunoscute.

• Determinați câteva soluții ale ecuației obținute: $9x+15y=60$.
Examinați şi continuați:

$9x+15y=60 \Leftrightarrow 15y=60-9x \Leftrightarrow y=4-0{,}6x$.

Pentru $x=5$ obținem $y=4-0{,}6\cdot 5 \Leftrightarrow y=1$; (5; 2)
Pentru $x=1{,}5$ obținem $y=4-0{,}6\cdot \square \Leftrightarrow y=\square$; (1,5; $\square$)
Pentru $x=0$ obținem $y=4-0{,}6\cdot \square \Leftrightarrow y=\square$. (0; $\square$)
soluțiile ecuației

• Care poate fi răspunsul la întrebarea problemei?

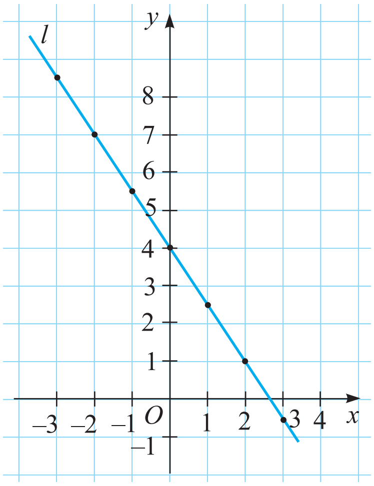
2 Să rezolvăm ecuația $3x+2y=8$ în mulțimea $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Explicăm

$3x+2y=8 \Leftrightarrow 2y=8-3x \Leftrightarrow y=4-1{,}5x$.

Completăm tabelul:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	8,5	7	5,5	4	2,5	1	–0,5



Reprezentăm în sistemul de axe ortogonale punctele ale căror coordonate sunt soluții ale ecuației date.

Punctele corespunzătoare soluțiilor ecuației $3x+2y=8$ sunt situate pe dreapta l şi invers: dacă punctul aparține dreptei l, atunci coordonatele lui reprezintă o soluție a ecuației $3x+2y=8$.

Dreapta l se numeşte ***graficul ecuației*** sau ***dreapta soluțiilor ecuației*** $3x+2y=8$.

Rețineți

Graficul ecuației de gradul I cu două necunoscute $ax+by=c$, $a,\ b\in\mathbb{R}^*$, coincide cu graficul funcției $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$, $a, b\in\mathbb{R}^*$, $c\in\mathbb{R}$.
Numărul $-\frac{a}{b}$ se numeşte ***panta*** (sau ***coeficientul unghiular*** al) dreptei – $ax+by=c$.

2.3. Noțiunea de sistem de două ecuații cu două necunoscute

1 Claviatura unui pian are 88 de clape, clape albe fiind cu 16 mai multe decât negre.
Câte clape albe şi câte clape negre are pianul?

Explicăm

Fie *x* numărul de clape albe, iar *y* – numărul de clape negre.
Atunci, obținem ecuațiile $x+y=88$ şi $x-y=16$.

$$(x_0;\ y_0)$$

Pentru a rezolva problema, trebuie să găsim perechea de numere $(x_0;\ y_0)$ – soluția comună a ambelor ecuații. În acest caz, se spune că avem de rezolvat un sistem de două ecuații cu două necunoscute şi se scrie:

$$\boxed{\begin{cases} x+y=88, \\ x-y=16. \end{cases}}$$

prima ecuație a sistemului

ecuația a doua a sistemului

semnul sistemului

sistemul de două ecuații cu două necunoscute

Soluție comună a ambelor ecuații este perechea de numere $(52;\ 36)$, deoarece

$52+36=88$ – Adevărat;

$52-36=16$ – Adevărat.

Răspuns: 52 de clape albe şi 36 de clape negre.

Definiție

Soluție a sistemului de ecuații cu două necunoscute se numeşte perechea ordonată de valori ale necunoscutelor pentru care fiecare ecuație a sistemului se transformă într-o propoziție adevărată.

2 Decideți dacă perechea de numere $(-2;\ 1)$ este soluție a sistemului de ecuații:

a) $\begin{cases} -x+y=3, \\ 3x-y=1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=-3, \\ -x+3y=-5. \end{cases}$

Explicăm

a)

$-(-2)+1=3$ – A

$3\cdot(-2)-1=1$ – F

Răspuns: $(-2;\ 1)$ nu este soluție a sistemului de ecuații.

b)

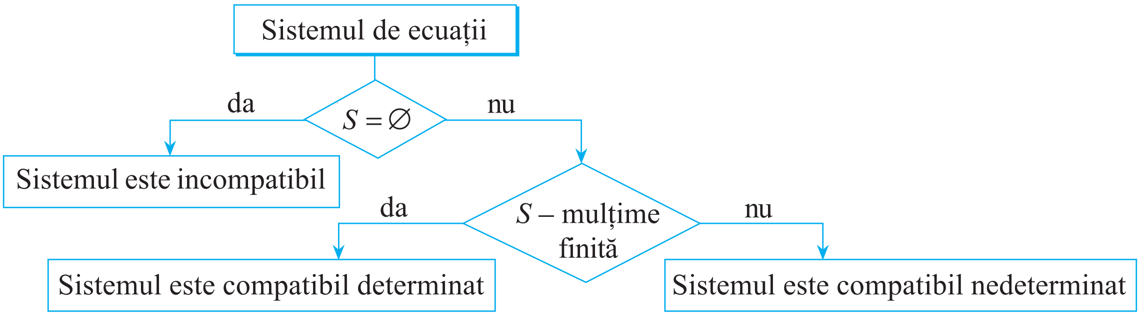
$2\cdot\square+\square=-3$ – □

$-\square+3\cdot\square=-5$ – □

Răspuns: $(-2;\ 1)$ – □.

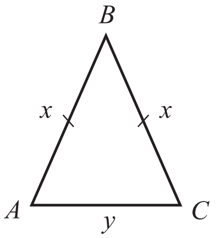
Definiție

A rezolva sistemul de ecuații înseamnă a afla mulțimea soluțiilor lui.
- Muțimea soluțiilor sistemului de ecuații se notează, de regulă, cu *S*.
- Sistemul de ecuații poate să nu aibă soluții; poate să aibă o mulțime finită sau o mulțime infinită de soluții.



2.4. Sisteme de două ecuații de gradul I cu două necunoscute

Laturile congruente ale unui triunghi isoscel sunt cu 11 cm mai lungi decât baza lui. Aflați lungimile laturilor triunghiului, dacă perimetrul lui este de 40 cm.



Rezolvăm Alcătuim sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x-y=11, \\ 2x+y=40. \end{cases}$$

(17; 6) ← soluția sistemului de ecuații

Răspuns: $AB=$ ☐ cm; $BC=$ ☐ cm; $AC=$ ☐ cm.

- Explicați cum a fost compus sistemul de ecuații.

Definiție

Sistemul de forma $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \end{cases}$ unde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ sunt numere reale, se numeşte **sistem de două ecuații de gradul I cu două necunoscute**.

Pentru a rezolva sistemul de ecuații, de regulă, se trece la un alt sistem de ecuații, mai simplu, echivalent cu cel dat.

Definiție

Sistemele de ecuații se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sunt egale.

Rețineți Pentru a obține sisteme echivalente, se aplică următoarele transformări:

Schimbarea ordinii ecuațiilor într-un sistem.

$$\begin{cases} x-2y=1, \\ 3x+2y=11, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=11, \\ x-2y=1. \end{cases}$$

Înlocuirea unei ecuații a sistemului cu altă ecuație, echivalentă cu cea inițială.

$$\begin{cases} 2x+y=3, \\ 5x-3y=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-2x, \\ 5x=2+3y. \end{cases}$$

Exprimarea într-o ecuație a sistemului a unei necunoscute prin cealaltă și substituirea acestei expresii în cealaltă ecuație a sistemului.

$$\begin{cases}-7x+y=2,\\ x+2y=3,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2+7x,\\ x+2\cdot(2+7x)=3.\end{cases}$$

Înlocuirea unei ecuații a sistemului cu altă ecuație, care se obține adunând sau scăzând două ecuații ale sistemului (înmulțite, dacă e cazul, cu un număr nenul).

$$\begin{cases}x-y=2,\\ 3x+y=5,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=2,\\ 4x=7.\end{cases}$$

2.5. Metode de rezolvare a sistemelor de două ecuații de gradul I cu două necunoscute

2.5.1. *Metoda substituției*

Dintr-o ecuație exprimăm o necunoscută prin cealaltă și o substituim în cealaltă ecuație.

$$\begin{cases}\enclose{circle}{x}+2y=1,\\ 2\enclose{circle}{x}-3y=-5,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\enclose{circle}{x}=\boxed{1-2y,}\\ 2\cdot\boxed{(1-2y)}-3y=-5,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-2y,\\ 2-4y-3y=-5,\end{cases}\Leftrightarrow$$

substituim

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-2y,\\ -7y=-7,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-2\cdot 1,\\ y=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1,\\ y=1.\end{cases}$$

Răspuns: $S=\{(-1;\,1)\}$.

- Examinați și continuați rezolvarea:

$$\begin{cases}-3x+y=-1,\\ 5x+2y=20,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\boxed{},\\ 5x+2\cdot\boxed{()}=20,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\boxed{},\\ \square\,x=\square\,,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\square\,,\\ y=\square\,.\end{cases}$$

substituim

Răspuns: $S=\{(\square;\,\square)\}$.

2.5.2. *Metoda reducerii*

Adunăm cele două ecuații ale sistemului.

$$\left.\begin{cases}2x\enclose{circle}{-3y}=-1,\\ 4x\enclose{circle}{+3y}=25,\end{cases}\right|\oplus\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y=-1,\\ 6x=24,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=4,\\ 2\cdot 4-3y=-1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4,\\ -3y=-9,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4,\\ y=3.\end{cases}$$

Răspuns: $S=\{(4;\,3)\}$.

Examinați și continuați rezolvarea:

$$\begin{cases}4x+2y=1,\\ 3x+y=1,\quad\big|\otimes(-2)\end{cases}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}4x\enclose{circle}{+2y}=1,\\ -6x\enclose{circle}{-2y}=-2,\end{cases}\right|\oplus\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2y=1,\\ \square\,x=\square\,,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\square\,,\\ 4\cdot\square+2y=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\square\,,\\ 2y=\square\,,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\square\,,\\ y=\square\,.\end{cases}$$

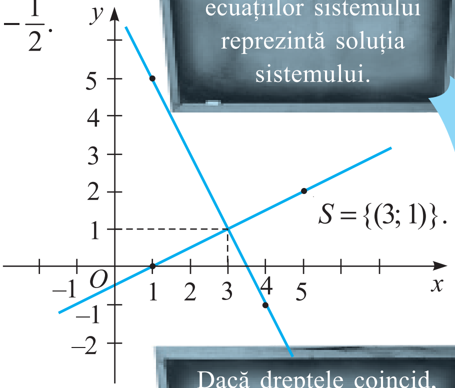
Răspuns: $S=\{(\square;\,\square)\}$.

2.5.3. Metoda grafică

$$\begin{cases} 2x+y=7, \\ x-2y=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+7, \\ -2y=-x+1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+7, \\ y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

x	1	4
$y=-2x+7$	5	-1

x	1	5
$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$	0	2



Coordonatele punctului de intersecție a dreptelor ecuațiilor sistemului reprezintă soluția sistemului.

Dacă dreptele coincid, atunci toate punctele lor (adică coordonatele lor) sunt soluții. Dacă dreptele sunt paralele, atunci sistemul nu are soluții.

Lucrare practică

I. Rezolvați prin metoda grafică sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} x+y=4, \\ 3x+y=6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+y=5. \end{cases}$

Câte soluții are fiecare sistem?

Aflați rapoartele coeficienților necunoscutelor x şi y şi comparați rapoartele obținute.

a) $\frac{1}{3}$ ● $\frac{1}{1}$ b) $\frac{\square}{\square}$ ● $\frac{\square}{\square}$

Trageți concluzia.

II. Rezolvați prin metoda grafică sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} x-y=2, \\ 2x-2y=-2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+6y=-3, \\ 4x+8y=2. \end{cases}$

Câte soluții are fiecare sistem?

Aflați raportul coeficienților necunoscutelor x şi y şi al termenilor liberi şi comparați rapoartele obținute.

a) $\frac{1}{2}$ ● $\frac{-1}{-2}$ ● $\frac{2}{-2}$ b) $\frac{\square}{\square}$ ● $\frac{\square}{\square}$ ● $\frac{\square}{\square}$

Trageți concluzia.

III. Rezolvați prin metoda grafică sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 4x-2y=2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-4y=10, \\ 3x-6y=15. \end{cases}$

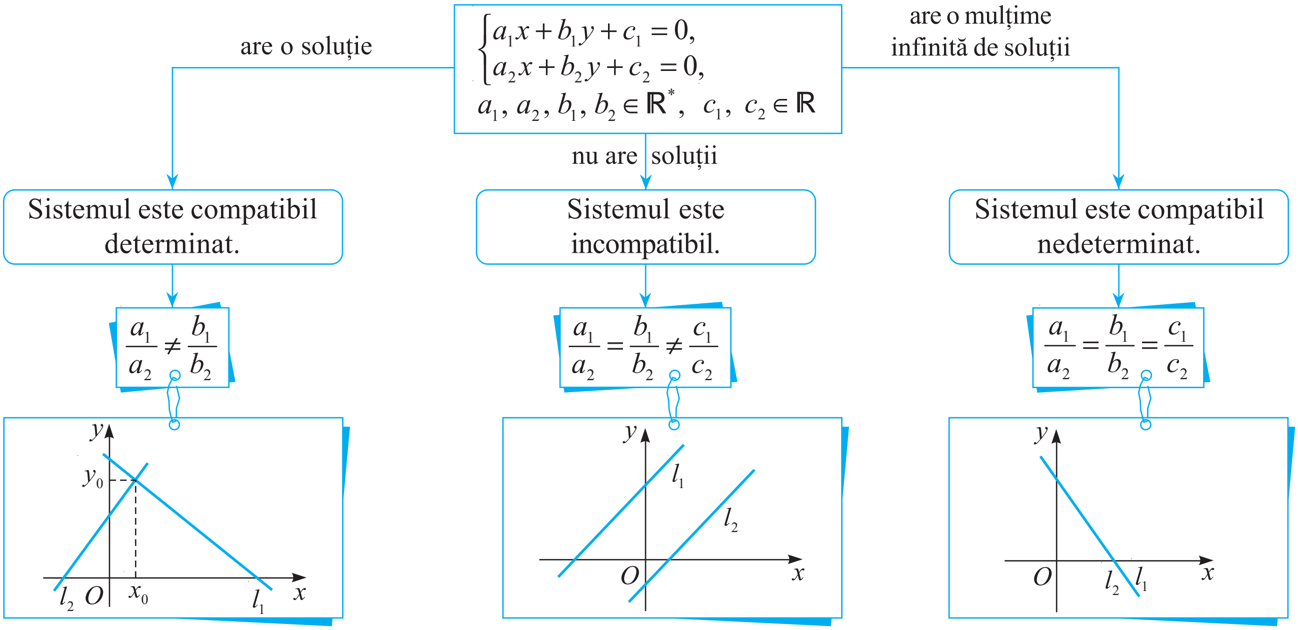
Câte soluții are fiecare sistem?

Aflați raportul coeficienților necunoscutelor x şi y şi al termenilor liberi şi comparați rapoartele obținute.

a) $\frac{2}{4}$ ● $\frac{-1}{-2}$ ● $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\square}{\square}$ ● $\frac{\square}{\square}$ ● $\frac{\square}{\square}$

Trageți concluzia.

Comparați concluziile cu următoarea schemă:



$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases}$$
$a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^*$, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$

Sistemul este compatibil determinat.

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$S = \{(x_0; y_0)\}$

Sistemul este incompatibil.

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

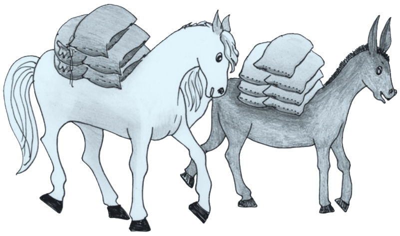
$S = \varnothing$

Sistemul este compatibil nedeterminat.

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$S = \{(x; y)\}$, unde $x \in \mathbb{R}$,
$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$

2.6. Rezolvarea unor probleme cu ajutorul sistemelor de ecuații de gradul I cu două necunoscute



Calul şi măgarul mergeau pe un drum, fiecare cu o povară grea în spate. Calul se plângea de povara sa.

– De ce te plângi? l-a întrebat măgarul. Dacă eu am să iau de la tine un sac, atunci povara mea va deveni de două ori mai grea decât a ta. Dacă însă tu vei lua un sac de pe spatele meu, atunci povara ta va fi egală cu a mea.

Câți saci ducea calul şi câți saci ducea măgarul?

În limbaj matematic

Calul şi măgarul mergeau ducând poveri grele.	Calul ducea x saci, iar măgarul – y saci.
Dacă măgarul va lua un sac de pe spinarea calului, atunci povara lui va deveni de două ori mai grea decât cea a calului.	$2(x-1) = y+1$
Dacă însă calul va lua un sac de pe spinarea măgarului, atunci poverile lor vor fi egale.	$x+1 = y-1$

Obținem sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2(x-1) = y+1, \\ x+1 = y-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 3, \\ x - y = -2, \end{cases} \Big| \ominus \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 3, \\ x = \square, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \square, \\ y = \square. \end{cases}$$

Răspuns: Calul ducea □ saci, iar măgarul – □ saci.

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Este soluție a ecuației $x+3y=9$ perechea de numere:
a) (1; 1); b) (6; 1); c) (0; 3); d) (–4; 4)?

2. Aflați trei soluții ale ecuației:
a) $x+y=6$; b) $x+2y=5$;
c) $3x-y=2$; d) $3x+2y=10$.

3. ***Investigați!*** Medicii au stabilit că, pentru a se dezvolta normal, copilul sau adolescentul cu vârsta de x ani $(1\le x\le 18)$ trebuie să doarmă zilnic y ore, unde $y+\frac{x}{2}=17$.
Determinați câte ore pe zi trebuie să dormiți voi, surorile sau frații voștri mai mici.

4. Din ecuația $2x+y=5$ exprimați:
a) necunoscuta y prin necunoscuta x;
b) necunoscuta x prin necunoscuta y.

5. Exprimați necunoscuta y prin necunoscuta x și aflați două soluții ale ecuației:

Model:
$3x+y=15 \Leftrightarrow y=-3x+15$
$x=0;\ y=-3\cdot 0+15 \Leftrightarrow y=15.$
$x=-1;\ y=-3\cdot(-1)+15 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y=18.$
(0; 15) (–1; 18).

a) $x-y=7$;
b) $2x+y=5$;
c) $5x-2y=10$.

6. Graficul ecuației $8x-5y=17$ trece prin punctul de abscisă 2. Aflați ordonata acestui punct.

7. Trasați graficul ecuației:
a) $x+y=6$; b) $3x-y=0$; c) $2x-y=1$.

8. ***Investigați!*** Determinați dacă este soluție a sistemului de ecuații $\begin{cases}3x+2y=19,\\ x+5y=15,\end{cases}$ perechea de numere:
a) (2; 5); b) (0; 3); c) (5; 2); d) $(6; \frac{1}{2})$.

9. Rezolvați în mulțimea numerelor reale prin metoda substituției sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases}x-y=2,\\ 2x-3y=2;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x-y=-4,\\ x+2y=8;\end{cases}$
c) $\begin{cases}x+y=6,\\ 3x-5y=2;\end{cases}$ d) $\begin{cases}2y-x=-3,\\ 3y-2x=-7.\end{cases}$

10. Rezolvați în mulțimea numerelor reale prin metoda reducerii sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases}4x-y=-1,\\ 2x+y=13;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+y=4,\\ 3x+y=6;\end{cases}$
c) $\begin{cases}x-y=-5,\\ -x+3y=19;\end{cases}$ d) $\begin{cases}3x+2y=19,\\ x+5y=15.\end{cases}$

11. Rezolvați prin metoda grafică sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases}x+y=10,\\ 2x-y=-1;\end{cases}$ b) $\begin{cases}y-2x=1,\\ 6x-y=7;\end{cases}$
c) $\begin{cases}x-y=2,\\ -2x+y=-4;\end{cases}$ d) $\begin{cases}3x+y=4,\\ 6x+2y=1.\end{cases}$

☐ **2** ☐

12. ***Lucrați în perechi!*** Numiți o soluție, dacă există, a ecuației:
a) $xy=0$; b) $2x^2+y^2=0$;
c) $x^2+y^2=4$; d) $|x|+|y|+1=0$.

13. Perechea de numere (3; 2) este soluție a ecuației $2x+by=12,\ b\in\mathbb{R}$. Aflați numărul b.

14. Perechea de numere (2; 1) este soluție a ecuației $ax+2y=8,\ a\in\mathbb{R}$. Aflați numărul a.

15. Scrieți o ecuație de gradul I cu două necunoscute a cărei soluție este perechea de numere:
a) (1; 2); b) (–3; 1); c) (0; – 2); d) (5; 7).

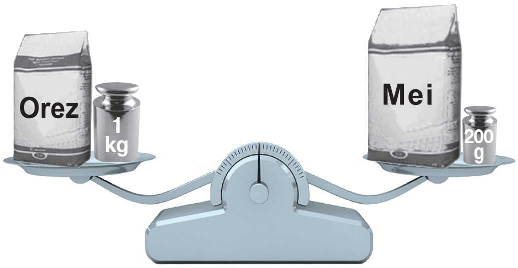
16. ***Lucrați în perechi!*** Reprezentați, în același sistem de axe ortogonale, graficele ecuațiilor:
a) $x+y=3$ și $x-y=1$; b) $x-y=-2$ și $x-y=2$.
Au aceste ecuații soluții comune?

17. Rezolvați prin două metode sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases}x+y=5,\\ 3x-5y=-1;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x-4y=2,\\ 3x-2y=16;\end{cases}$
c) $\begin{cases}6x-8y=-2,\\ 5x+2y=1{,}8;\end{cases}$ d) $\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y=0,\\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=10.\end{cases}$

18. ***Investigați!*** Fără a rezolva sistemul de ecuații, determinați numărul de soluții ale acestuia și tipul sistemului:
a) $\begin{cases}4x+y=2,\\ 3x-2y=1;\end{cases}$
b) $\begin{cases}3x-6y=6,\\ x-2y=3;\end{cases}$
c) $\begin{cases}x-2y=3,\\ 2x-4y=6;\end{cases}$
d) $\begin{cases}x+3y=4,\\ 4x+y=-5.\end{cases}$

Model:
$\begin{cases}3x+2y=1,\\ 6x+4y=3;\end{cases}\quad \frac{3}{6}=\frac{2}{4}\ne\frac{1}{3}.$
Sistemul nu are soluții, deci este incompatibil.

Rezolvați problemele alcătuind sisteme de ecuații.



19. Pe cântar sunt în total 4 kg de orez şi mei. Utilizând datele din desen, determinați câte kilograme de orez şi câte kilograme de mei sunt în pachetele respective.

20. Tata este cu 26 de ani mai în vârstă decât fiica, iar peste 4 ani el va fi de 3 ori mai în vârstă decât ea. Câți ani are tata şi câți ani are fiica?

21. 42 de turişti au fost cazați în camere cu două şi trei paturi. Au fost ocupate în total 16 camere. Câte camere cu două paturi şi câte cu trei paturi au fost ocupate?

22. Un client a depus la o bancă 1 200 de lei pe două conturi. Pe un cont banca oferă o dobândă anuală de 8 %, iar pe celălalt – de 10 %. Peste un an suma s-a majorat cu 108 lei. Câți lei a depus clientul pe fiecare cont?

23. O firmă este formată din două filiale, al căror venit total în anul precedent a fost de 13 milioane de lei. Pentru anul curent este preconizată majorarea venitului sucursalei I cu 25 %, iar al sucursalei II – cu 40 %. Venitul total al firmei trebuie să constituie 17 milioane de lei. Aflați care a fost venitul fiecărei sucursale în anul precedent.

24. La un magazin de fructe s-au adus portocale în două tipuri de lăzi, mari şi mici. Se ştie că 3 lăzi mari şi 5 lăzi mici cântăresc împreună 82 kg, iar 4 lăzi mari şi 2 lăzi mici cântăresc împreună 58 kg.

a) Aflați cât va plăti cumpărătorul pentru o ladă mică, dacă 1 kg de portocale costă 28 lei 50 bani.

b) Dar cât va plăti dacă va procura o ladă mare?

25. ***Lucrați în perechi!*** Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul de ecuații:

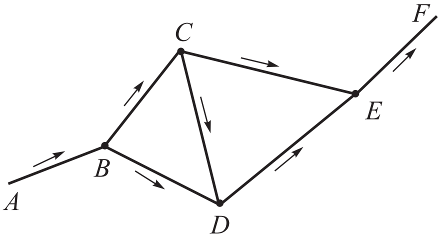
a) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{5} = \dfrac{y-1}{2}, \\ 4x+5y=23; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-y-24=2(5x-2y), \\ 3y-2=4-(x-y). \end{cases}$

☐ ☐ **3**

26*. Aflați valorile parametrului real m pentru care sistemul de ecuații are o mulțime infinită de soluții: $\begin{cases} 3x+my=3, \\ mx+3y=3. \end{cases}$

27*. Aflați pentru care valori ale parametrului real a sistemul de ecuații este incompatibil: $\begin{cases} x+ay=1, \\ x-3y=2a+3. \end{cases}$

28. În desen este reprezentată schema unor autostrăzi, iar săgețile indică direcțiile circulației. Pe porțiunea AB a trecut o coloană auto formată din 36 de automobile. Se ştie că, dintre ele, în continuare, pe porțiunea BC au trecut cu 10 automobile mai multe decât pe porțiunea DE, iar pe porțiunea CD au trecut 2 automobile. Câte automobile din coloană au trecut pe fiecare dintre porțiunile BC, BD, DE şi CE?



29. ***Investigați!*** O firmă este formată din două filiale, care, împreună, au avut anul trecut un venit de 13 milioane de lei. Pentru anul curent sunt planificate creşteri de venit al filialelor respective în mărime de 75 % şi 140 %. Astfel, venitul total al firmei se va dubla. Aflați venitul fiecărei filiale:

a) în anul trecut; b) planificat pentru anul curent.

30. Amestecând o soluție de acid clorhidric cu concentrația de 20% şi o soluție de acid clorhidric cu concentrația de 50 %, s-au obținut 30 l de acid clorhidric cu concentrația de 40 %. Ce cantități de fiecare fel de soluție au fost amestecate?

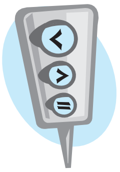
§ 3. Inecuații cu o necunoscută. Sisteme de inecuații cu o necunoscută

3.1. Inegalități numerice

1 Substituiți ○ cu unul dintre semnele >, <, astfel încât să obțineți inegalități numerice adevărate:

$\sqrt{5}\ \bigcirc\ 2$ $\quad$ $\pi\ \bigcirc\ 3{,}14$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\ \bigcirc\ 1$ $\quad$ $|7{,}2|\ \bigcirc\ |-8{,}1|$

2 Știind că $x<y,\ m<0,\ x, y, m\in\mathbb{R}$, și utilizând proprietățile inegalităților numerice, comparați:



$x+m\ \bigcirc\ y+m$

$mx\ \bigcirc\ my$

$\frac{x}{m^2}\ \bigcirc\ \frac{y}{m^2}$

$|m|\cdot x\ \bigcirc\ |m|\cdot y$

$\frac{x}{m^5}\ \bigcirc\ \frac{y}{m^5}$

Rețineți

① Dacă $a, b, c\in\mathbb{R}$ și $a>b$, atunci $a+c>b+c$.

② Dacă $a, b\in\mathbb{R}$, $a>b$ și $c\in\mathbb{R}^*_+$, atunci $ac>bc$.

③ Dacă $a, b\in\mathbb{R}$, $a>b$ și $c\in\mathbb{R}^*_-$, atunci $ac<bc$.

④ Dacă $a, b\in\mathbb{R}$, $a>b$ și $c\in\mathbb{R}^*_+$, atunci $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

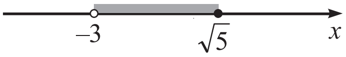
⑤ Dacă $a, b\in\mathbb{R}$, $a>b$ și $c\in\mathbb{R}^*_-$, atunci $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

3.2. Intervale de numere reale. Operații cu intervale de numere reale

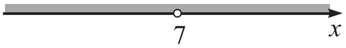
1 Se știe că numărul real x aparține porțiunii colorate. Folosind intervalele, scrieți mulțimea căreia îi aparține x:

a)


b)

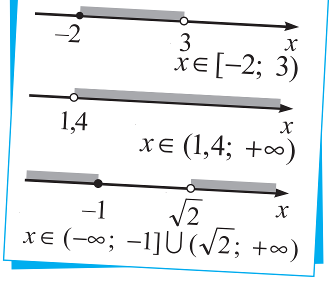

c)


d)


e)


• Citiți fiecare interval obținut.

Model:



$x\in[-2;\ 3)$

$x\in(1{,}4;\ +\infty)$

$x\in(-\infty;\ -1]\cup(\sqrt{2};\ +\infty)$

2 Observați modelul din primul rând al tabelului și completați similar $(a, b\in\mathbb{R},\ a<b)$:

Mulțimea	Intervalul numeric	
	Reprezentarea pe axă	Notarea
$\{x\mid x\in\mathbb{R},\ a\le x\le b\}$		$[a, b]$
$\{x\mid x\in\mathbb{R},\ a\le x<b\}$	?	?
$\{x\mid x\in\mathbb{R},\ a<x\le b\}$	?	?
?	?	(a, b)
?		?
?		$[a, +\infty)$
$\{x\mid x\in\mathbb{R},\ x<b\}$	?	?
?	?	$(-\infty, b]$
$\mathbb{R}$	?	$(-\infty, +\infty)$

3 Observați modelul și aflați reuniunea și intersecția intervalelor:

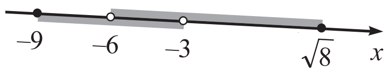
a) $(-8; 7]$ și $(-3; 8)$;

b) $(-\infty; \sqrt{5})$ și $(-\infty; -\sqrt{6})$;

c) $(1; +\infty)$ și $[-5; 4)$;

d) $[-2; \sqrt{10}]$ și $[-\sqrt{10}; +\infty)$.

Model:



$(-6; \sqrt{8}] \cup [-9; -3) = [-9; \sqrt{8}]$;

$(-6; \sqrt{8}] \cap [-9; -3) = (-6; -3)$.

3.3. Inecuații de gradul I cu o necunoscută

1 Vlad a promis că va citi zilnic cel puțin 10 pagini dintr-o carte. În prima zi el a citit cu 4 pagini mai puține decât în ziua a doua, iar în a treia zi – de 1,5 ori mai multe pagini decât în ziua a doua. De asemenea, numărul de pagini citite în ziua a treia este mai mare decât numărul de pagini citite în primele două zile. Și-a respectat Vlad promisiunea?

Rezolvăm Fie în ziua a doua Vlad a citit x pagini, atunci, în prima zi el a citit $(x-4)$ pagini, iar în ziua a treia – $1{,}5x$ pagini.

$$\boxed{1{,}5x > x + x - 4} \Leftrightarrow 1{,}5x > 2x - 4 \Leftrightarrow -0{,}5x > -4 \Leftrightarrow x < 8$$

Răspuns: Vlad ______ promisiunea.

Definiție

Inecuațiile de formele $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b\leq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numesc **inecuații de gradul I cu o necunoscută**.

Exemplu:

$2(x-5) > 8$

$x = \boxed{15}$ – soluție a inecuației, deoarece

$2\cdot(15-5) > 8$ – Adevărat

• Este numărul 7 soluție a acestei inecuații?

Definiție

Soluție a inecuației cu o necunoscută se numește valoarea necunoscutei care transformă această inecuație într-o inegalitate adevărată.

Rețineți

- A rezolva inecuația înseamnă a afla mulțimea soluțiilor ei.
- Mulțimea soluțiilor inecuației se notează, de regulă, cu S.
- Mulțimea soluțiilor inecuației de gradul I cu o necunoscută se scrie ca un interval de numere.

Ne amintim

$x \geq a$

$S = [a; +\infty)$

$x < b$

$S = (-\infty; b)$

$a < x < b$

$S = (a; b)$

2 Examinați şi completați:

a) $x > 2$

$S = (2; +\infty)$

b) $x \le 5$

$S = \boxed{}$

c) $-3 \le x < 0$

$S = \boxed{}$

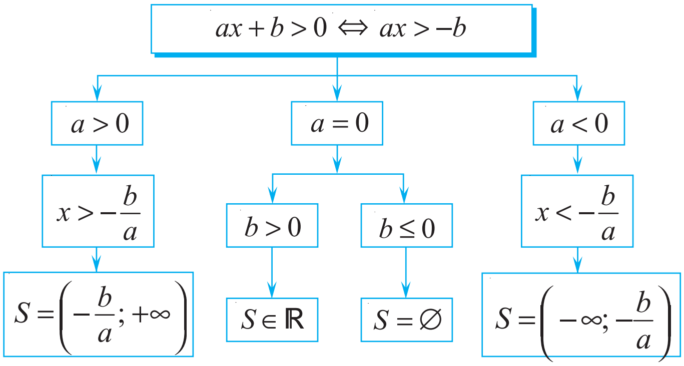
3 Rezolvăm în $\mathbb{R}$ inecuația: $2(x-5) > 8 \Leftrightarrow x-5 > 4 \Leftrightarrow x > 9$

Răspuns: $S = (9; +\infty)$

Definiție

Două inecuații cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sunt egale.

4 Examinați schema de rezolvare a inecuației de forma $ax + b > 0$, $a \in \mathbb{R}$.



- Utilizând schema din sarcina **4**, continuați rezolvarea în mulțimea $\mathbb{R}$:

a) $3x - 6 > 4 + 5(x-4) \Leftrightarrow 3x - 6 > 4 + 5x - 20 \Leftrightarrow \boxed{}\, x > \boxed{} \Leftrightarrow x \bigcirc \boxed{}$.

Răspuns: $S = \boxed{}$.

b) $2(1-3x) > 3(5-2x) \Leftrightarrow 2 - 6x > 15 - 6x \Leftrightarrow \boxed{}\, x > \boxed{} \Leftrightarrow \boxed{}$.

Răspuns: $S = \boxed{}$.

- Compuneți scheme similare pentru rezolvarea inecuațiilor de formele $ax + b < 0$; $ax + b \ge 0$; $ax + b \le 0$.

3.3. Sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută

- Într-un ceainic s-a turnat apă cu temperatura de 20°C şi s-a pus la încălzit. Peste fiecare minut temperatura apei se majora cu 8°C. Peste cât timp temperatura apei va fi de cel puțin 60°C şi de cel mult 80°C?

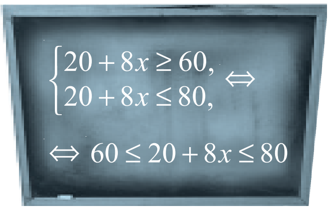
Rezolvăm

Fie x min. timpul necesar încălzirii respective. Atunci, obținem inecuațiile $20 + 8x \ge 60$ şi $20 + 8x \le 80$.

Pentru a rezolva problema, trebuie să aflăm soluțiile comune ale acestor inecuații (intersecția mulțimilor soluțiilor lor).

În acest caz, se spune că avem de rezolvat un sistem de două inecuații cu o necunoscută şi se scrie:

$$\boxed{\begin{cases}20+8x\geq 60,\\ 20+8x\leq 80,\end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases}8x\geq 40,\\ 8x\leq 60,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 5,\\ x\leq 7{,}5;\end{cases} \Leftrightarrow 5\leq x\leq 7{,}5.$$



$$\begin{cases}20+8x\geq 60,\\ 20+8x\leq 80,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 60\leq 20+8x\leq 80$$

Răspuns: Cel puțin 5 min. şi cel mult 7,5 min.

Rețineți

- Forma generală a sistemului de două inecuații de gradul I cu o necunoscută este:

$$\begin{cases}a_1x+b_1\geq 0,\ a_1\in\mathbb{R}^*,\ b_1\in\mathbb{R},\\ a_2x+b_2\geq 0,\ a_2\in\mathbb{R}^*,\ b_2\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

- Sistemul de inecuații poate fi format din inecuații ce conțin oricare dintre semnele $<, \leq, >, \geq$.

Definiție

Soluție a unui sistem de inecuații de gradul I cu o necunoscută se numeşte valoarea necunoscutei care transformă fiecare inecuație a sistemului într-o inegalitate adevărată.

Rețineți

- A rezolva sistemul de inecuații înseamnă a afla mulțimea soluțiilor lui.
- Mulțimea soluțiilor sistemului de inecuații se notează, de regulă, cu S şi este intersecția mulțimilor soluțiilor inecuațiilor sistemului.

1 Examinați şi completați:

1) $\begin{cases}x>2,\\ x>3,\end{cases} \Leftrightarrow x>3.$

Răspuns: $S=(3;+\infty)$.

2) $\begin{cases}x<-1,\\ x\geq 2.\end{cases}$

Sistemul nu are soluții reale.

Răspuns: $S=\varnothing$.

3) $\begin{cases}x\geq 3,\\ x\leq 5,\end{cases} \Leftrightarrow 3\leq x\leq 5.$

Răspuns: $S=$ ☐.

4) $\begin{cases}x<0,\\ x\leq 4,\end{cases} \Leftrightarrow x$ ● ☐.

Răspuns: $S=$ ☐.

2 Examinați modelul şi continuați rezolvarea sistemului de inecuații:

$$\begin{cases}8x-9<6x-3,\\ 2-x>4x-3,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\square\, x<\square,\\ \square\, x>\square,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ \bigcirc\ \square,\\ x\ \bigcirc\ \square,\end{cases} \Leftrightarrow \square.$$

Răspuns: $S=$ ☐.

Model:

$$\begin{cases}3-4x<5,\\ 6+9x\leq 15,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4x<2,\\ 9x\leq 9,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>-\frac{1}{2},\\ x\leq 1,\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x\leq 1.$$

Răspuns: $S=\left(-\frac{1}{2};1\right]$.

Exerciții și probleme

1

1. Citiți intervalul de numere:

a) $(-\infty; 1]$; b) $(-\infty; -4{,}5)$;

c) $(\sqrt{7}; +\infty)$; d) $[-\sqrt{6}; +\infty)$;

e) $(-7\frac{2}{5}; 0)$; f) $[3\sqrt{5}; 78]$;

g) $[-\sqrt{11}; 4)$; h) $(-2{,}5; \sqrt{2}]$.

2. Utilizând axa numerelor, aflați reuniunea și intersecția intervalelor:

a) $[-4{,}5; 2)$ și $(0; \sqrt{5})$; b) $(-\infty; 3{,}7)$ și $(-2; +\infty)$;

c) $(-\infty; 3{,}7)$ și $(-2; +\infty)$; d) $(\sqrt{7}; 15]$ și $[15; 2013)$.

3. ***Investigați!*** *Adevărat* sau *Fals?*

$2\sqrt{2} > 3$

$1,(2) < 1{,}215$

A/F

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} > 3^{-1}$

$\sqrt{7} < \pi$

$2^3 < 3^2$

4. Se știe că $a, b \in \mathbb{R}$ și $a > b$. Comparați:

$\frac{a}{b}$ ○ $\frac{b}{a}$;

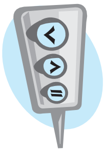
$-a$ ○ $-b$;

$a - 15$ ○ $b - 15$;

$0{,}01a$ ○ $0{,}01b$;

$\frac{a}{-5}$ ○ $\frac{b}{-5}$;

$b - a$ ○ 0.



5. ***Lucrați în perechi!*** Scrieți trei numere ce aparțin intervalului:

a) $(50; +\infty)$; b) $(-\infty; -3]$; c) $[1; 2)$.

6. Scrieți toate numerele întregi ce aparțin intervalului:

a) $[-1{,}2; 0{,}3)$; b) $\left[\frac{3}{13}; \frac{13}{3}\right)$; c) $(\sqrt{3}; \pi]$.

7. ***Investigați!*** Care dintre numerele

$\boxed{-2}$, $\boxed{3{,}5}$, $\boxed{0}$, $\boxed{5}$, $\boxed{\sqrt{10}}$

sunt soluții ale inecuației $3x + 5 > 15$?

8. Scrieți inecuația și intervalul de numere care corespund reprezentării:

a)

b)

c)

d)

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $5x - 2 \geq 13$; b) $8 - 4x > -32$;

c) $2(1 - x) \geq 4(3x + 2)$; d) $2 - 3(x + 2) \leq 5 - 2x$.

10. Determinați dacă numerele $-1; 0; 1; 15$ sunt soluții ale sistemului de inecuații:

a) $\begin{cases} x > -4, \\ x < 8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 5 > 0, \\ x - 14 > 0. \end{cases}$ c) $\begin{cases} x < 5, \\ x + 1 > 3. \end{cases}$

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} -3x > 9, \\ 4x < 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 11x + 1 \geq -5, \\ 2 - 3x < 5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3 - 4x > 5, \\ 6 + 9x \leq 1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 6 > 2x, \\ 2x - 6 > 5x; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + 1 \leq 13, \\ 9 - 2x < x; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x - 2 \geq 10, \\ x \leq 7. \end{cases}$

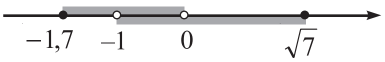
2

12. Scrieți sub formă de interval sau reuniune de intervale de numere mulțimea reprezentată pe axă:

a)

b)

c)



d)

13. Efectuați: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, dacă:

a) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Q}$; b) $A = (-\infty, 5]$, $B = (-\sqrt{3}, 10)$;

c) $A = \mathbb{Z}$, $B = [-4, 5)$; d) $A = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $B = \mathbb{R}$.

14. Împărțiți ambii membri ai inecuației $x < -6$ la

a) 4; b) –4; c) $\frac{1}{3}$; d) –3.

15. ***Lucrați în perechi!*** Se știe că $-3 < a < 2$. Completați:

a) $\square < 2a < \square$; b) $\square < \frac{a}{2} < \square$;

c) $\square < a - 1 < \square$; d) $\square < -3a < \square$;

e) $\square < 2 - a < \square$; f) $\square < \frac{3}{5}a < \square$.

16. ***Investigați!*** Compuneți o inecuație cu mulțimea soluțiilor:

a) $S = [-1; +\infty)$; b) $S = (-\infty; 2)$;

c) $S = [-3; 1]$; d) $S = (0; 2]$.

17. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\frac{3x-7}{6}\ge\frac{5-6x}{4}$;

b) $\frac{x-1}{4}+\frac{x+3}{2}<1-\frac{x}{6}$;

c) $(x-3)(x-6)<(x-1)(x-2)$.

18. Pentru care valori ale necunoscutei x valoarea expresiei:

a) $-5(3x+2{,}2)-2$ este nenegativă;

b) $3(0{,}5x-4)+8{,}5x$ este negativă?

19. Pentru care valori ale necunoscutei y valorile expresiei $\frac{3y-2}{72}$:

a) sunt pozitive;

b) nu sunt mai mari decât 3;

c) nu sunt mai mici ca -5?

20. ***Investigați!*** Aflați cea mai mare soluție întreagă a inecuației $x-\frac{x+1}{2}<\frac{x-3}{4}-\frac{x-2}{3}$.

21. ***Lucrați în perechi!*** Pentru care valori ale necunoscutei x are sens expresia:

a) $\sqrt{\frac{2{,}5x-4}{6}}$;

b) $\sqrt{\frac{5}{0{,}8x-3}}$?

22. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases}0{,}7x-3(0{,}2x+1)<0{,}5x+1,\\0{,}3(1-x)+0{,}8x>x+5{,}3;\end{cases}$

b) $\begin{cases}17(3x-1)-50x+1<2(x+4),\\2(6-5x)<10(1-1{,}2x);\end{cases}$

c) $\begin{cases}(9x+3)(x-4)>9x^2+x+5,\\2x-3-(x-3)\le5;\end{cases}$

d) $\begin{cases}12x^2-(2x-3)(6x+1)>x,\\(5x-1)(5x+1)-25x^2>x-6.\end{cases}$

23. ***Lucrați în grup!***

Examinați modelul și aflați valorile necunoscutei x pentru care are sens expresia:

a) $\sqrt{5x-3}+\sqrt{1-2x}$;

b) $\sqrt{2x+8}-\frac{2}{\sqrt{3-12x}}$.

Model:

Expresia $\frac{4}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{2x-1}$ are sens, dacă

$$\begin{cases}x+1>0\\2x-1\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x\ge\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2}.$$

Răspuns: $x\in\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.

☐ ☐ **3**

24. Efectuați $A\cup B$ și $A\cap B$, dacă $a, b\in\mathbb{R}$ și:

a) $A=(-a, a),\ B=(-\infty, a]$;

b) $A=[a-1, a+1],\ B=[-3, 3],\ a>1$;

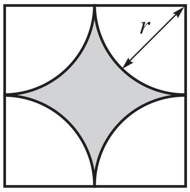
c) $A=(-\infty, 0),\ B=(-a-1, a+1),\ a>0$;

d) $A=(-\infty, a],\ B=[b, +\infty)$.

25. Pentru care valori $a\in\mathbb{R}$ este adevărată inegalitatea:

a) $a<|a|$; b) $-a<|a|$; c) $-a<|-a|$; d) $a<|-a|$?

26. Fie l lungimea liniei care mărginește figura colorată. Completați: ☐ $<l<$ ☐, dacă se știe că $2{,}5<r<2{,}6$.



27. Reprezentați pe axa numerelor mulțimea soluțiilor inecuației:

a) $|x|>5$;

b) $|x|\le3$;

c) $1\le|x|<2$.

28. Scrieți inecuația ce conține necunoscuta în modul și care are mulțimea soluțiilor reprezentată pe axă:

a)

b)

29. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\frac{12-3x}{|x|+6}\ge0$; b) $\frac{-x^2-3}{7x+21}\ge0$; c) $\left(\frac{3x^2+2}{5x-8}\right)^{-1}\le0$.

30*. Determinați valorile parametrului real m pentru care sistemul de inecuații $\begin{cases}x\le2,\\x\ge a:\end{cases}$

1) nu are soluții;

2) are o unică soluție;

3) are mulțimea soluțiilor $S=[a;\ 2]$;

4) are mulțimea soluțiilor $S=[2;\ a]$.

31. Rezolvați în muțimea $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases}5x+8<3,\\|x|\le2;\end{cases}$ b) $\begin{cases}4x-7\le9,\\|x|>3;\end{cases}$ c) $\begin{cases}|x|>5,\\|x|\le7.\end{cases}$

32. Temperatura apei pentru îmbăiatul unui bebeluș trebuie să fie de cel mult 38 °C și cel puțin 34 °C. Câți litri de apă cu temperatura de 18 °C trebuie turnați în cada în care sunt deja 10 l de apă cu temperatura de 80 °C, pentru ca să poată fi scăldat în ea copilul?

Exerciții și probleme recapitulative

1 ☐ ☐

1. Determinați care dintre ecuații sunt ecuații de gradul I cu o necunoscută:

a) $2x+1=0$; b) $3x=-9$; c) $5-x=0$;
d) $x=0$; e) $3x=1-x$; f) $-8x+6=0$;
g) $\sqrt{x}=0$; h) $\frac{1}{x}=10$; i) $\sqrt{5}x-\sqrt{3}=0$.

2. Care dintre numerele-elemente ale mulțimii $S=\{-1, 0, 1, 3, 5\}$ sunt soluții ale ecuației:

a) $x-1=2$; b) $2x=x+5$; c) $\sqrt{x}=1$;
d) $6+2x=4$; e) $x(x+1)=0$; f) $-3x+5=8$?

3. Aflați DVA al ecuației:

a) $\frac{x}{1-x}=4$; b) $x^2+1=0$;
c) $\sqrt{x}-3=8$; d) $5x-1=3x+2$.

4. Rezolvați ecuația $\sqrt{5}-2x=3x$:

a) în mulțimea $\mathbb{Q}$; b) în mulțimea $\mathbb{R}$.

5. Rezolvați ecuația $0{,}5x+5=x$:

a) în mulțimea $\mathbb{Z}$; b) în mulțimea $\mathbb{Q}$.

6. Este soluție a ecuației $x-2y=10$ perechea de numere:

a) (0; 5); b) (0; –5); c) (0; 0); d) (12; 1)?

7. Exprimați necunoscuta *y* prin necunoscuta *x* și aflați trei soluții reale ale ecuației:

a) $2x-y=7$; b) $x+2y=12$; c) $-8x+2y=6$.

8. Trasați graficul ecuației:

a) $x-y=4$; b) $x+y=1$;
c) $2x-y=0$; d) $x+2y=1$.

9. Determinați dacă este soluție a sistemului de ecuații $\begin{cases}2x-y=8,\\ x+5y=-18\end{cases}$ perechea de numere:

a) (0; 1); b) (2; –4); c) (1; –1); d) (2; 4).

10. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}x-y=0,\\ 5x+y=1;\end{cases}$ b) $\begin{cases}4x-y=1,\\ 8x-2y=3;\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x+3y=1,\\ 2x-5y=9.\end{cases}$

11. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}2x-y=1,\\ x+y=-4;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x+y=-1,\\ x-y=5;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x+2y=-3,\\ 2x-y=-11.\end{cases}$

12. *Lucrați în perechi!* Sunt oare echivalente sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases}2x-y=3,\\ x+y=3\end{cases}$ și $\begin{cases}x-2y=3,\\ x-y=3?\end{cases}$

b) $\begin{cases}x-y=4,\\ 3x+y=16\end{cases}$ și $\begin{cases}x-y=4,\\ x+y=6?\end{cases}$

13. Efectuați $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, dacă:

a) $A=(-\infty, 5)$, $B=(-3, 8)$;
b) $A=\mathbb{N}$, $B=[-2, 6]$;
c) $A=[-10, 8]$, $B=[0, 3]$; d) $A=(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $B=\mathbb{Z}$.

14. Completați, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

a) $(\boxed{}; 2)\cup(-\sqrt{5}, +\infty)=(-10, +\infty)$;
b) $[-\sqrt{5}, \boxed{}]\cap[\boxed{}, 7)=[1, 6]$;
c) $(-\infty; 2{,}5)\cup[\boxed{}, +\infty)=(-\infty, +\infty)$;
d) $(\boxed{}, \sqrt{37})\cap(-\infty, 6)=(-3, 6)$.

15. Scrieți toate numerele întregi ce aparțin intervalului:

a) $[-2{,}1; 0{,}1]$; b) $\left[\frac{1}{2}, \frac{14}{5}\right]$; c) $(\sqrt{2}, \pi]$.

16. *Investigați!* Care dintre numerele

$\boxed{-1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{5}$ $\boxed{7}$ $\boxed{10}$

sunt soluții ale inecuației $2x-5>3$?

17. *Lucrați în perechi!* Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $2x-1>2$; b) $7-x\geq 5$;
c) $3(1+x)<2x$; d) $5-4x\leq 2(1+x)$;
e) $0{,}5x>-1{,}2$; f) $-10x<\sqrt{10}$.

18. *Investigați!* Determinați dacă numerele

$\boxed{-2}$ $\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{6}$

sunt soluții ale sistemului de ecuații:

a) $\begin{cases}x<-1,\\ x<2;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-3>0,\\ 1-x\leq 4;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x-2\leq 2x,\\ x<10.\end{cases}$

19. *Lucrați în perechi!* Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}-6x\leq 12,\\ 5x<20;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3-2a<13,\\ 3a>15;\end{cases}$ c) $\begin{cases}2-6t>14,\\ 1\geq 3+2t.\end{cases}$

☐ **2** ☐

20. Pentru care valori ale necunoscutei *t* valoarea expresiei $3t-4$ este de 5 ori mai mare decât valoarea expresiei $4-t$?

21. *Lucrați în grup!* Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $2(x+1{,}5)-3x=6(x-3)$; b) $5(6-x)+3x=-2(3-2x)$; c) $\frac{2-x}{3}+\frac{3x+15}{4}=1$; d) $-\frac{5x}{7}+\frac{1-4x}{2}=-3$.

22. ***Investigați!*** Este oare numărul 2,1 soluție a ecuației:
a) $x-2=|2-x|$; b) $4{,}2-x=|x|$; c) $|-x|+2{,}1=0$?

23. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $|x|-2=3$; b) $5|x|-3=12$;
c) $-3|x|+2=|x|-6$; d) $|x-3|=-10$.

24. Rezolvați prin metoda grafică sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases} x+y=2, \\ 3x+y=4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=5, \\ x+2y=-3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y=0, \\ -x+y=-5. \end{cases}$

25. ***Lucrați în perechi!*** Rezolvați prin 3 metode sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases} x-y=0, \\ 3x+y=8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x+y=3, \\ x-2y=-9; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=1, \\ 5x-y=5. \end{cases}$

26. Graficul ecuației $4x+3y=5$ trece prin punctul de abscisă -1. Aflați ordonata acestui punct.

27. Graficul ecuației $2x-5y=-1$ trece prin punctul de ordonată 2. Aflați abscisa acestui punct.

28. Trasați graficul ecuației:
a) $x-y=5$; b) $-2x+y=0$; c) $x-3y=3$.

29. ***Investigați!*** Aflați cea mai mică soluție naturală a inecuației $\frac{x+4}{7}-\frac{x+7}{4}<-3$.

30. ***Investigați!*** Pentru care valori ale lui x, $f(x)>0$, $f(x)<3$, $f(x)\geq 5$, dacă $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=-3x+7$; b) $f(x)=\frac{5-4x}{2}$?

31. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $x-\frac{2x+1}{4}\geq\frac{4x-3}{3}$.

32. Aflați valorile reale ale lui x pentru care au loc simultan inegalitățile:
a) $1-2x\geq -3$ și $1-2x\leq 4$;
b) $4x-2\geq -1$ și $4x-2<5$.

33. ***Investigați!*** Aflați valorile lui x pentru care are sens expresia $\sqrt{0{,}7+\frac{x}{4}}+\frac{5}{\sqrt{2-0{,}4x}}$.

34. Efectuați $A\setminus B$, $B\setminus A$, dacă $a, b\in\mathbb{R}$ și:
a) $A=(-a, a)$, $B=(-\infty, a]$;
b) $A=[a-1, a+1]$, $B=[-3, 3]$, $a>1$;
c) $A=(-\infty, 0)$, $B=(-a-1, a+1)$, $a>0$;
d) $A=(-\infty, a]$, $B=[b, +\infty)$.

35. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases} 0{,}5x+3(0{,}5x-1)<0{,}3x+2, \\ 1{,}2x-2(0{,}1x+0{,}5)>0{,}2x-5; \end{cases}$
b) $\begin{cases} (3x-1)(3x+1)>9x^2-x+0{,}5, \\ (x+1)(5x-3{,}5)\leq 5x^2-2{,}5x+1. \end{cases}$

36. ***Lucrați în grup!*** Aflați soluțiile întregi ale sistemului de inecuații:
a) $\begin{cases} 6-4t>0, \\ 3t-1\geq 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3-18z\leq 0, \\ 0{,}2+0{,}1z>0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+0{,}5\geq 0, \\ 1{,}25-0{,}1x>0. \end{cases}$

37. Aflați latura unui pătrat știind că, dacă o mărim cu 5 cm, aria pătratului crește cu 145 cm^2.

38. Într-o asociație agricolă au fost angajate de 2 ori mai multe femei decât bărbați. După ce pleacă 8 bărbați cu soțiile lor, rămân de 3 ori mai multe femei decât bărbați. Câți bărbați și câte femei au fost angajați la început în această asociație?

39. Dana îi spune Lenuței: „Dacă mi-ai da o bomboană din bomboanele tale, eu aş avea de două ori mai multe ca tine”. Lenuța îi spune Danei: „Dacă tu mi-ai da o bomboană din ale tale, atunci am avea același număr de bomboane”. Câte bomboane are fiecare?

40. Viteza unui vapor care merge în sensul curentului este de 20 km/h, iar împotriva curentului ea este de 16 km/h. Aflați viteza vaporului și viteza cursului apei.

41. Din două puncte situate la o distanță de 12 km unul față de celălalt pornesc în același timp doi bicicliști. Dacă merg unul către celălalt, se întâlnesc după 30 minute de la plecare, iar dacă merg în același sens, al doilea îl ajunge pe primul după 3 ore. Cu ce viteză merge fiecare dintre cel doi bicicliști?

42. Un avion mergând în sensul vântului a parcurs distanța dintre două oraşe în 4 ore 30 minute. Mergând împotriva vântului, avionul a parcurs acest drum în 5 ore. Aflați distanța dintre oraşe și viteza avionului, știind că viteza vântului este de 12 km/h.

43. Rezolvați problema prin 3 metode:
1) prin metoda falsei ipoteze;
2) cu ajutorul ecuației;
3) cu ajutorul sistemului de ecuații.

a) Într-o parcare sunt biciclete cu două roți și automobile. Știind că în total sunt 29 de mijloace de transport și 56 de roți, determinați câte biciclete cu două roți și câte automobile sunt în parcare.

b) Într-un hotel sunt apartamente cu 2 camere și apartamente cu 3 camere. Știind că în acest hotel sunt în total 54 de apartamente, iar numărul total de camere este de 142, determinați numărul de apartamente cu 2 camere și numărul apartamentelor cu 3 camere.

☐ ☐ **3**

44. Scrieți elementele mulțimii $A\cap B$, unde $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|=x\}$ și $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|\le 5\}$.

45. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$|-x+5|+\sqrt{x^2}+3x+1=0.$$

46. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

$$|x-3|+10x-2\le x(x+4)+11.$$

47*. Pentru care valori ale lui m, $m\in\mathbb{R}$, sistemul $\begin{cases}3x-y=5,\\ x+my=1\end{cases}$ nu are soluții?

48. Tortul „Veselia” se prepară din făină, smântână, zahăr şi unt. Se ştie că pentru un tort de 800 g s-a folosit smântână cu 180 g mai puțină decât făină şi cu 40 g mai multă decât zahăr. Unt s-a folosit de 7 ori mai puțin decât smântână. Aflați cantitatea fiecărui ingredient.

49. Un turist urcă dealul cu viteza de 3 km/h şi îl coboară cu viteza de 5 km/h. Aflați distanța parcursă de turist, dacă urcuşul este cu 1 km mai lung decât coborâşul şi turistul a parcurs întreaga distanță în 3 ore.

50. Câte kilograme de bomboane cu prețul de 78 de lei/kg trebuie de adăugat la 2 kg de bomboane cu prețul de 54 de lei/kg pentru ca prețul bomboanelor asortate să fie de cel puțin 60 de lei/kg şi cel mult 68 de lei/kg?

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta 1

1. Fie ecuația $2-\square x=8$.

a) Completați astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației să fie $S=\{-2\}$.

b) Trasați graficul ecuației $2x+y=4$.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

$$\begin{cases}2-4x=3y,\\ 2x+y=4.\end{cases}$$

2. Aflați toate soluțiile întregi ale sistemului de inecuații:

$$\begin{cases}3x-2<7,\\ 4-2x\le 3x+14.\end{cases}$$

3. Rezolvați problema cu ajutorul sistemului de ecuații.

Un fermier are cai şi curcani, în total 29 de capete şi 76 de picioare. Câți cai şi câți curcani are fermierul?

Varianta 2

1. Fie ecuația $\square x-18=-6$.

a) Completați astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației să fie $S=\{4\}$.

b) Trasați graficul ecuației $3x-y=6$.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

$$\begin{cases}x-9=-2y,\\ 3x-y=6.\end{cases}$$

2. Aflați toate soluțiile întregi ale sistemului de inecuații:

$$\begin{cases}2x+5\le 11,\\ 4-3x<2x+9.\end{cases}$$

3. Rezolvați problema cu ajutorul sistemului de ecuații.

Într-un bloc sunt 80 de apartamente de 2 şi 3 camere, în total 190 de camere. Câte apartamente de fiecare fel sunt în acest bloc?

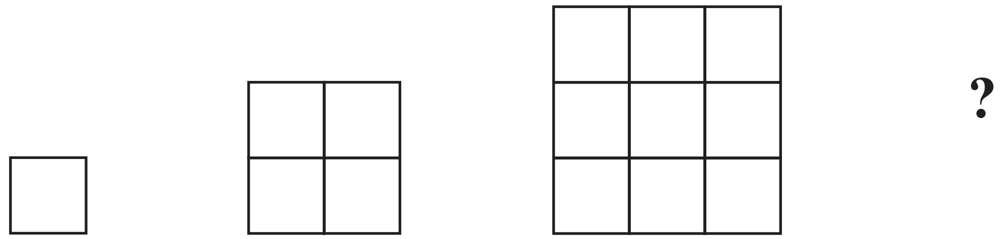
Capitolul 4 Funcții. Șiruri

> *Tot ce e gândire corectă este matematică.*
> Grigore Moisil

§1. Noțiunea de funcție. Recapitulare și completări

1.1. Noțiunea de funcție

1 Observați legitatea și desenați figura ce urmează.



$(1\ \text{cm})^2$ $(2\ \text{cm})^2$ $(3\ \text{cm})^2$ $(4\ \text{cm})^2$

2 În tabel este înregistrată distanța parcursă de un automobil în 1 oră; 2 ore; 3 ore; 3,5 ore; 4 ore; 4,5 ore.

t, ore	1	2	3	3,5	4	4,5
s, km	30	90	160	240	320	360

În secvențele **1** și **2** sunt examinate corespondențele dintre elementele a două mulțimi $\mathbb{N}^*$ și $\mathbb{N}^*$; $\{1; 2; 3; 3{,}5; 4; 4{,}5\}$ și $\mathbb{R}$.

Astfel de ***corespondențe*** se numesc ***funcționale***.

Definiție

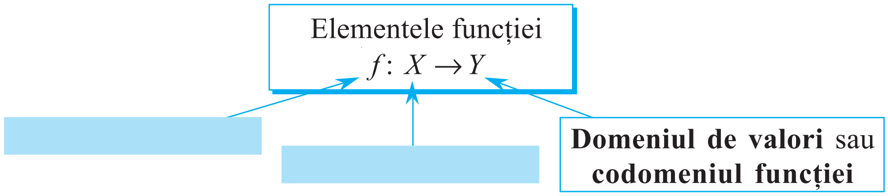
Fie X și Y două mulțimi nevide. Corespondența prin care fiecărui element al mulțimii X i se asociază un singur element al mulțimii Y se numește **funcție definită pe mulțimea** X **cu valori în mulțimea** Y (sau, pe scurt, **funcție de la** X **la** Y).

Rețineți

Notația $f\colon X \to Y$ se citește „funcția f definită pe mulțimea X cu valori în mulțimea Y” sau „funcția f de la X la Y”.

Astfel, în secvențele **1** și **2** putem defini funcțiile $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ și $g\colon \{1; 2; 3; 3{,}5; 4; 4{,}5\} \to \mathbb{R}$.

- Observați și completați adecvat:



Elementele funcției
$f\colon X \to Y$

Domeniul de valori sau **codomeniul funcției**

Fie funcția $f\colon X \to Y$ şi x un element arbitrar al mulțimii X.

Rețineți

Dacă $y \in Y$ şi funcția f asociază elementului x elementul y, atunci se spune că x este ***argumentul*** (sau ***variabila independentă*** a) ***funcției***, iar y este ***valoarea funcției*** f ***în punctul*** x.

Se notează $y = f(x)$ şi se citeşte „y este egal cu f de x”.

Se mai spune „y este funcție de argumentul x”.

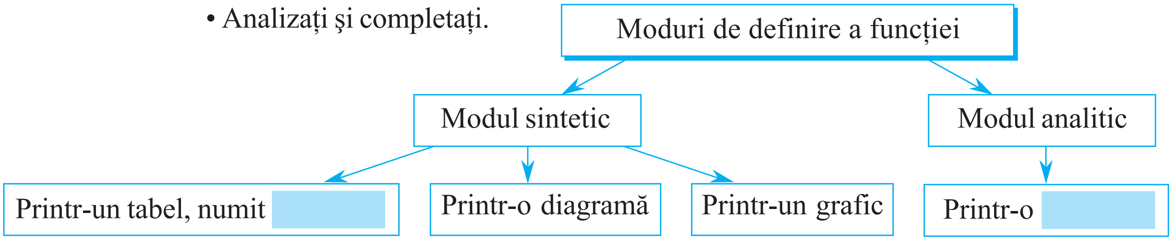
Definiție

Mulțimea $E(f) = \{y \mid y = f(x),\ x \in X\}$ se numeşte **mulțimea valorilor funcției** f.

Avem $E(f) \subseteq Y$.

1.2. Moduri de definire a funcției

- Analizați şi completați.

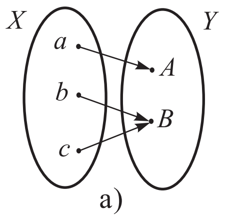


- Completați tabelul de valori (vezi problema **1**):

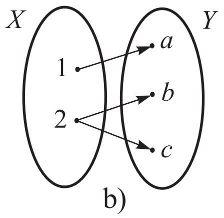
x	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	1	4	9			

Funcția poate fi definită şi verbal. Exemplificați!

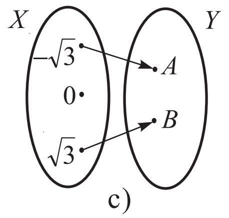
- Care dintre următoarele diagrame defineşte o funcție? Argumentați.



a)



b)



c)

- a) Care dintre următoarele tabele defineşte o funcție?

x	–3	–2	–1	0	1
$f(x)$	6	4	2	0	–2

①

x	5	3	2	1	0	–1
$g(x)$	10	8	7	6	5	4

②

x	A	B	C	D	E	F
$h(x)$	10	10	10	10	10	10

③

b) Descrieți printr-o formulă fiecare dintre funcțiile definite în a).

Explicăm

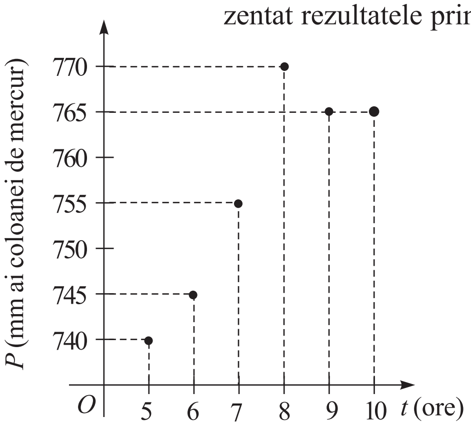
1. $f\colon \underbrace{\{-3;-2;-1;0;1\}}_{\boxed{D(f)}} \to \underbrace{\{6;4;2;0;-2\}}_{\boxed{E(f)}},\ \underbrace{f(x) = -2x}_{\boxed{\text{Formula}}};$

2. $g\colon \qquad \to \qquad,\ g(x) = \qquad;$

3. $h\colon \qquad \to \qquad,\ h(x) = \qquad.$

1.3. Graficul funcției

• Meteorologul de serviciu a înregistrat la fiecare oră presiunea atmosferică şi a reprezentat rezultatele printr-un grafic.



Presiunea atmosferică minimă a fost înregistrată la ora ☐.

Presiunea atmosferică maximă a fost înregistrată la ora ☐.

La ora 7 presiunea atmosferică era de ☐.

În perioada de la ora ☐ până la ora ☐ presiunea atmosferică nu s-a schimbat.

În ce perioadă de timp presiunea atmosferică s-a ridicat? Dar în care a coborât?

• Defineşte acest grafic o funcție?

Explicăm Graficul reprezentat defineşte o funcție de forma $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, deoarece fiecărei ore t, $t \in \mathbb{N}$, îi corespunde o singură valoare a presiunii atmosferice p, $p \in \mathbb{N}$.

Definiție

Funcția $f: X \to Y$, unde X şi Y sunt mulțimi numerice, se numeşte **funcție numerică**.

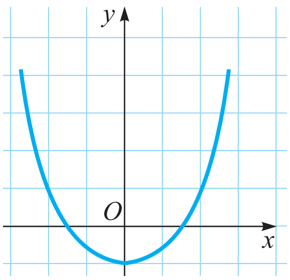
Domeniul de definiție al unei funcții numerice poate fi o mulțime numerică finită sau infinită.

$$g: \underbrace{\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}}_{\boxed{\operatorname{card} D(g) = 7}} \to \{5\}; \quad h: \underbrace{\mathbb{R}}_{\boxed{D(h) - \text{mulțime numerică infinită}}} \to \mathbb{R}_+^*,$$

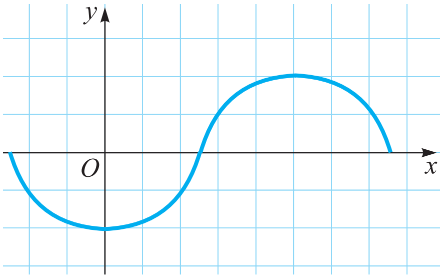
Rețineți

Graficul funcției numerice $f: X \to Y$ este figura formată din punctele cu coordonatele $(x; y)$, unde $x \in X$ şi $y = f(x) \in Y$.
Graficul funcției f se notează cu G_f.
Deci, $G_f = \{(x; y) \mid x \in X,\ y = f(x) \in Y\}$.
Egalitatea $y = f(x)$ se numeşte ***ecuația graficului funcției*** f.

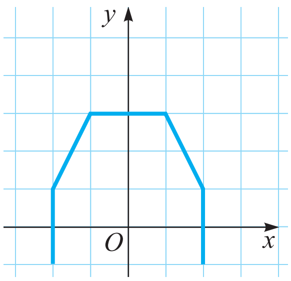
• Observați şi determinați care dintre următoarele grafice defineşte o funcție. Argumentați.



①



②



③

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. 1) Citiți funcția:

a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$; b) $g: \{1; 2; 3; 4\} \to \{1; 8; 27; 64\}$; c) $h: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$; d) $p: \mathbb{R} \to \{10\}$.

2) Indicați elementele funcției.

3) Determinați domeniul de definiție şi domeniul de valori ale funcției.

2. Completați adecvat:

a) $f: \{-1; -0{,}5; 0; 0{,}5; 1\} \to \{-5; \square; \square; \square; \square\}$, $f(x) = 5x$;

b) $g: \{-\sqrt{5}; -2; 1; \sqrt{5}; \sqrt{7}\} \to \{\square\}$, $g(x) = 2$;

c) $h: \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}\right\} \to \{\square, \square, \square, \square, \square\}$, $h(x) = \frac{1}{x}$.

3. Un tren ce se deplasează cu viteza de 80 km/h parcurge distanța s km în t ore. Scrieți formula prin care se defineşte dependența lui s de t. Aflați valoarea funcției pentru valorile 2,5; 1,2 şi 0,6 ale argumentului.

4. Aria unui dreptunghi cu laturile de 8 cm şi x cm este egală cu A cm². Definiți printr-o formulă dependența lui A de x. Aflați valorile funcției pentru valorile argumentului $x \in \{2; 4{,}5; 10\}$.

5. *Lucrați în perechi!* Fie funcția $f: \{-4; -0{,}5; 0; 1; 2; 5\} \to \mathbb{R}$:

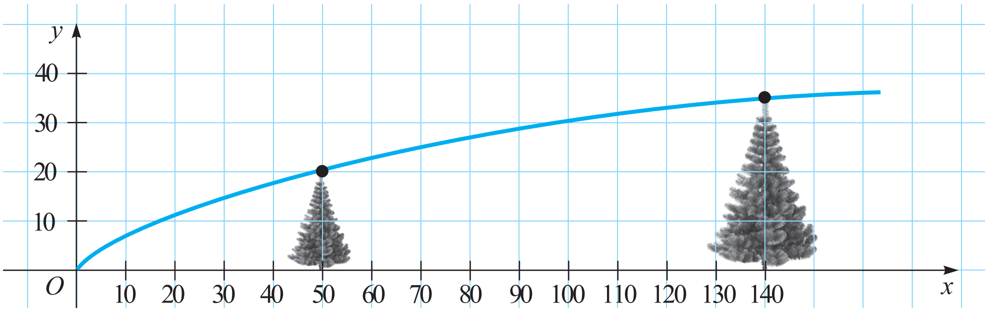
a) $f(x) = 2x + 1$; b) $f(x) = 2x^2$; c) $f(x) = 3 - x$.

1) Completați tabelul de valori al funcției f.

2) Determinați $D(f)$ şi $E(f)$.

3) Definiți funcția f prin diagramă.

6. Dependența dintre înălțimea y (în m) a unui brad şi vârsta acestuia x (în ani) este redată în următorul grafic:



a) Aflați înălțimea bradului la vârsta de: 10 ani; 30 de ani; 100 de ani.

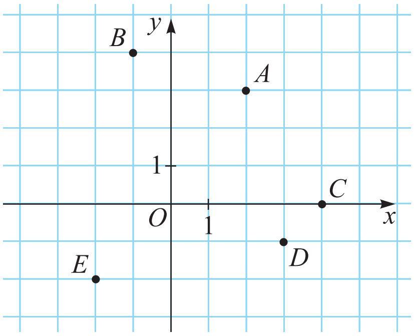
b) Cu cât a crescut bradul în perioada de la 10 până la 50 de ani; de la 30 până la 80 de ani; de la 100 până la 140 de ani?

7. a) Completați adecvat:

$A(\square; \square)$, $B(\square; \square)$, $C(\square; \square)$, $D(\square; \square)$, $E(\square; \square)$.

b) Reprezentați în acelaşi sistem cartezian de coordonate punctele:

$F(-2; 3)$; $G(1{,}5; 0)$; $H(0; -4)$; $K(3{,}5; -2)$; $L(-4; -3)$.



☐ **2** ☐

8. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită analitic prin formula:
a) $f(x) = -2x + 3$; b) $f(x) = x^2 - 2$.

1) Aflați pentru care valori ale argumentului x valoarea funcției f este egală cu:

a) 2; b) 0; c) 7.

2) Construiți și completați tabelul de valori al funcției f pentru $x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

3) Reprezentați grafic funcția f în baza tabelului de valori obținut la 2).

9. Verificați dacă punctul:

1) $A\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$; 2) $O(0; 0)$; 3) $B(-3; 9)$

aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = -\frac{x}{2}$; b) $f(x) = -2x$; c) $f(x) = x^2$.

10. *Investigați!* Reprezentați grafic 8 puncte cu coordonatele $(x; y)$, dacă:

a) $y = 3x + 2$; b) $y = x^2 + 2$.

Ce observați?

11. *Investigați!* Aflați mulțimea de valori și reprezentați grafic funcția:

a) $f: \{-4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{x}$;

b) $f: \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{5}{x}$.

Ce observați?

12. Fie $f: D \to \mathbb{R}$. Aflați $D(f)$, dacă:

a) $f(x) = 3{,}5x + 0{,}(8)$; b) $f(x) = \frac{1}{1-2x}$;

c) $f(x) = 2x^2 + 3$; d) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

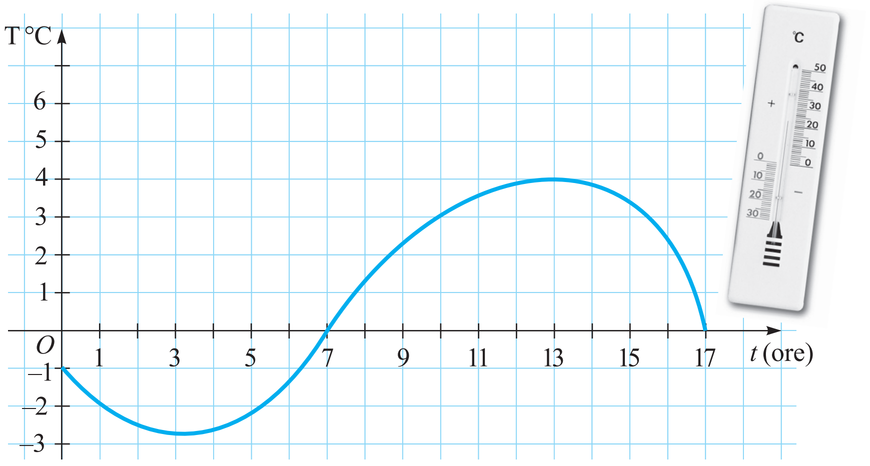
13. *Lucrați în grup!*

În desen este reprezentat graficul variației temperaturii într-o zi de la începutul lunii martie.

a) Ce temperatură era la ora 2; 5; 7; 10; 14; 16; 17?

b) La ce oră temperatura era de 1°; 0°; 3°; 4°?

c) La ce oră a fost cea mai joasă temperatură? Dar cea mai ridicată?



14. Graficul funcției f este linia frântă $ABCD$, unde $A(-1; -2)$, $B(0; 5)$, $C(4; 2)$, $D(7; 1)$.
Reprezentați graficul funcției f.

15. Formulați exemple de dependențe funcționale:

a) din viața cotidiană; b) din fizică;

c) din chimie; d) din geografie.

☐ ☐ **3**

16. Aflați $D(f)$, dacă:

a) $f(x) = \frac{2}{|x-2|-4}$; b) $f(x) = -\frac{|x|}{3|x|-3}$.

17. Aflați cea mai mică valoare a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$; b) $f(x) = 4x^2 - 4x + 3$.

18. Demonstrați că funcția $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 6x + 10}$, nu poate avea valori negative.
Aflați $D(f)$.

19. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 3|x| - 1$, unde $-4 \le x \le -3$; b) $f(x) = \frac{2}{|x|+2}$, unde $-3 \le x \le 3$.

§2. Funcția de gradul I

2.1. Noțiunile *funcție de gradul I* și *funcție constantă*

• Dinu avea 20 de lei. El şi-a procurat x pixuri la preţul de 1,5 lei şi i-au mai rămas f lei. Definiţi printr-o formulă funcţia ce determină dependenţa lui f de x. Care este domeniul de definiţie al acestei funcţii?

Rezolvare:

Pentru x pixuri Dinu a plătit □ lei.

Atunci, formula prin care se defineşte funcţia respectivă este

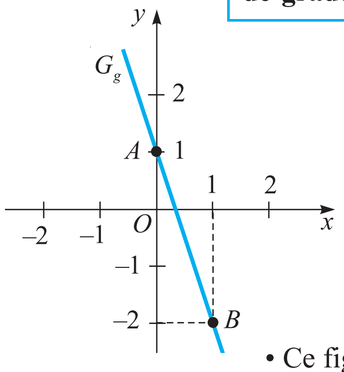
$f(x) = 20 - \square$ sau $f(x) = -\square + 20$, unde

$D(f) = \{1;\ 2;\ 3;\ \square;\ \square;\ \square;\ \square;\ \square;\ \square;\ \square;\ \square;\ \square;\ \square\}$.

Funcţia obţinută este o funcţie de forma $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

Definiție

Funcţia de forma $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$, unde $a \neq 0$ şi $a, b \in \mathbb{R}$, se numeşte **funcţie de gradul I**.



• Reprezentaţi grafic funcţia de gradul I $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -3x + 1$.

Rezolvare:

Graficul funcţiei g este o dreaptă. Pentru a construi această dreaptă este suficient să determinăm coordonatele a □ puncte diferite ale acesteia:

x	0	□
$g(x)$	□	–2

$A(0;\ \square)$, $B(\square;\ -2)$.

• Ce figură geometrică reprezintă graficul funcţiei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = -3$?

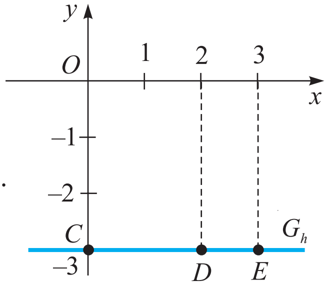
Explicăm

Pentru funcţia h avem

x	0	2	3
$h(x)$	–3	–3	–3

Deci, $C(0;\ -3)$, $D(\square;\ \square)$, $E(\square;\ \square)$.

Aşadar, graficul funcţiei h este o dreaptă paralelă cu axa Ox.



Definiție

Funcţia de forma $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = b$, unde $b \in \mathbb{R}$, se numeşte **funcţie constantă**.

Rețineți

Graficul funcţiei de gradul I este o dreaptă.
Graficul funcţiei constante este o dreaptă paralelă cu axa Ox.

2.2. Proprietăți ale funcției de gradul I

• a) Reprezentaţi în acelaşi sistem cartezian de coordonate graficele funcţiilor de gradul I $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 0{,}5x - 2$, şi $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -0{,}5x + 4$.

b) Aflaţi coordonatele punctelor de intersecţie a graficelor G_f şi G_g cu axa Ox şi axa Oy.

c) Determinaţi tipul unghiului format de graficul fiecărei funcţii cu direcţia pozitivă a axei Ox.

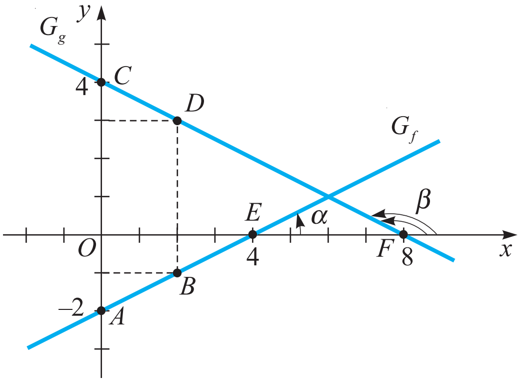
d) Fie $x_1 > x_2$. Comparați: $f(x_1)$ cu $f(x_2)$, $g(x_1)$ cu $g(x_2)$.

e) Pentru care valori ale variabilei x: $f(x) > 0$, $g(x) > 0$? Dar $f(x) < 0$, $g(x) < 0$?

Rezolvare:

a)

x	0	2
$f(x)$		
$g(x)$		



Punctele de coordonate $A(0;$ ▭$)$ şi $B($▭$; -1)$ determină o dreaptă, care este graficul funcției ▭.

Punctele de coordonate $C(0;$ ▭$)$ şi $D($▭$; 3)$ determină o dreaptă, care este graficul funcției g.

b) 1) Determinăm coordonatele punctelor de intersecție a graficelor G_f şi G_g cu axa Ox:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow$ ▭ $= 0 \Leftrightarrow x =$ ▭.

Aşa cum $y = 0$, obținem $E($▭$; 0)$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow$ ▭ $= 0 \Leftrightarrow x =$ ▭.

Aşa cum $y = 0$, obținem $F($▭$; 0)$.

2) Determinăm coordonatele punctelor de intersecție a graficelor G_f şi G_g cu axa Oy:

Aşa cum $x = 0$, obținem:

$y = f(0) = 0{,}5 \cdot \square - 2 = -2.$

Obținem $A(0;$ ▭$)$.

Aşa cum $x = 0$, obținem:

$y = g(0) = -0{,}5 \cdot \square + 4 = 4.$

Obținem $C(0;$ ▭$)$.

c) Unghiul α format de G_f şi direcția pozitivă a axei Ox este ▭.

c) Unghiul β format de G_g şi direcția pozitivă a axei Ox este ▭.

d) Analizăm graficele G_f şi G_g şi tragem concluzia.

Pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ şi x_1 ▭ x_2, are loc relația $f(x_1)$ ▭ $f(x_2)$.

Astfel, funcția f este strict crescătoare.

Pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ şi x_1 ▭ x_2, are loc relația $g(x_1)$ ▭ $g(x_2)$.

Astfel, funcția g este strict descrescătoare.

e) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 0{,}5x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 4.$

$f(x) < 0$ pentru orice ▭.

e) $g(x) > 0 \Leftrightarrow -0{,}5x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 8.$

$g(x) < 0$ pentru orice ▭.

Definiție

Fie funcția $f \colon D(f) \to \mathbb{R}$.

- **Zerou al funcției** f se numeşte valoarea variabilei x, pentru care $f(x) = 0$.
- Funcția f se numeşte **strict crescătoare pe mulțimea** $D(f)$, dacă pentru orice $x_1, x_2 \in D(f)$ şi $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$.
- Funcția f se numeşte **strict descrescătoare pe mulțimea** $D(f)$, dacă pentru orice $x_1, x_2 \in D(f)$ şi $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$.

Reţineţi

Fie funcţia de gradul I $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a, b\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$

- $x_0=-\dfrac{b}{a}$ este zeroul funcţiei f.
- Funcţia f este:
  - – strict crescătoare, dacă $a>0$;
  - – strict descrescătoare, dacă $a<0$.
- Numărul a se numeşte ***panta*** (sau ***coeficientul unghiular*** al) graficului funcţiei f.

2.3. Proporţionalitatea directă

• Pentru un zbor Paris–New York se consumă 15 000 de tone de oxigen – cantitate care poate fi restabilită timp de un an de un hectar de pădure.

a) Descrieţi analitic dependenţa dintre cantitatea de oxigen consumată şi numărul de zboruri pe ruta Paris–New York.

b) Câte hectare de pădure pot restabili timp de un an cantitatea de oxigen consumată pentru 50 de zboruri Paris–New York?

Numărul de zboruri şi cantitatea de oxigen consumată sunt mărimi direct proporţionale.

Completaţi adecvat:

a) $f:\mathbb{N}\to\boxed{},\ f(x)=\boxed{}\cdot x.$

b) Pentru 50 de zboruri se consumă $50\cdot\boxed{}=\boxed{}$ tone de oxigen.

Această cantitate de oxigen poate fi restabilită de $\boxed{}$ ha de pădure timp de un an.

• Reprezentaţi graficul funcţiei:

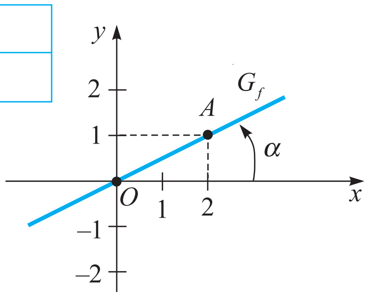
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=0{,}5x;$

b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-\dfrac{1}{2}x.$

Rezolvare:

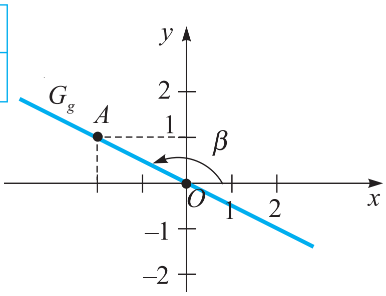
a)

x	0	
$y=f(x)$		



b)

x	0	
$y=g(x)$		



• Cercetaţi graficele G_f şi G_g şi răspundeţi la întrebări.

1) Este oare funcţia f strict crescătoare? Dar funcţia g?

2) Ce tip de unghi este unghiul α? Dar unghiul β?

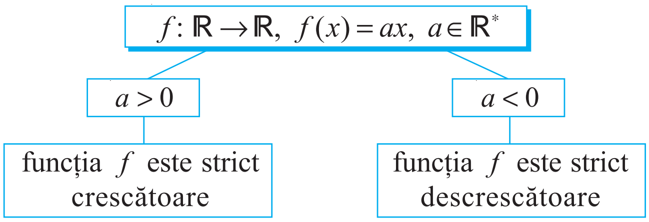
3) Pentru care valori ale variabilei x avem $f(x)>0$? Dar $f(x)<0$? Dar $g(x)>0$? Dar $g(x)<0$?

4) Are oare funcţia f zerouri? Dar funcţia g? În caz că funcţia are zerou, aflaţi-l.

Definiție

- Funcția de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, se numeşte **proporționalitate directă**.
- Numărul a se numeşte **coeficient de proporționalitate** (sau **panta** graficului funcției f, sau **coeficientul unghiular** al graficului funcției f).

Proporționalitatea directă este un caz particular al funcției de gradul I ($b = 0$).



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}^*$

$a > 0$ — funcția f este strict crescătoare

$a < 0$ — funcția f este strict descrescătoare

• Completați propoziția:

Graficul proporționalității directe este ▭ ce conține originea ▭.

Exercițiii și probleme

1 ☐ ☐

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Selectați formulele prin care poate fi definită funcția f:

a) de gradul I;

b) constantă;

c) proporționalitate directă.

$\boxed{f(x) = -4x}$ $\boxed{f(x) = 2,5}$ $\boxed{f(x) = 2x - 5}$ $\boxed{f(x) = x^3}$ $\boxed{f(x) = \frac{1}{x}}$ $\boxed{f(x) = -x - 1}$

2. a) Compuneți tabelul de valori pentru funcția $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$, dacă $x \in \{-1; 0; 0,5; 2; 3\}$.
b) Trasați graficul funcției f.

3. Determinați panta graficului şi reprezentați grafic funcția:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 8$;

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2 - x$;

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -1,5x$;

d) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = -3,5$;

e) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = \sqrt{7}$;

f) $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r(x) = 10x - 8$.

4. În ce cadrane se află graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

a) $f(x) = 5$; b) $f(x) = -0,3$;

c) $f(x) = -\sqrt{7}x$; d) $f(x) = \frac{1}{8}x$.

5. Aflați zeroul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 1 - 10x$; b) $f(x) = \sqrt{3}x + 3$;

c) $f(x) = 4,2 - 2x$; d) $f(x) = -2\sqrt{5}x + \sqrt{10}$.

6. Decideți dacă este strict crescătoare funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = -2x - 3$; b) $f(x) = \sqrt{2}x + 5$;

c) $f(x) = 5 - 4x$; d) $f(x) = 1 + 7x$.

7. ***Lucrați în perechi!*** Completați astfel încât funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ să fie:

1) strict crescătoare; 2) strict descrescătoare:

a) $g(x) =$ ▭ x; b) $g(x) = -$ ▭ x.

8. ***Investigați!*** Stabiliți tipul unghiului format de direcția pozitivă a axei Ox şi graficul funcției:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{21}x + 10$;

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -3x + 8$;

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 25x$;

d) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = -3\sqrt{7}x$;

e) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = 10$;

f) $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r(x) = -\sqrt{7}$.

☐ **2** ☐

9. Volumul cubului se calculează după formula $V = a^3$, unde a este lungimea muchiei lui. Definește oare această formulă o funcție? Este ea oare o funcție de gradul I? Argumentați răspunsul.

10. Perimetrul triunghiului echilateral se calculează prin formula $P = 3a$, unde a este lungimea laturii triunghiului. Definește oare această formulă o funcție de gradul I? Este ea o proporționalitate directă? Argumentați răspunsul.

11. ***Lucrați în grup!*** Completați astfel încât punctele $A($☐; ☐$)$, $B(0;$ ☐$)$, $C($☐$; -1)$, $D(0{,}5;$ ☐$)$ să aparțină graficului funcției:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2 - 5x$; b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 0{,}2x + 3$;

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 2{,}5x$; d) $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ r(x) = -7x$.

12. Tata avea 50 de lei. El a cumpărat câteva kilograme de cartofi la prețul de 4,5 lei/kg.

a) Descrieți analitic dependența dintre rest și numărul de kilograme de cartofi cumpărate.

b) Aflați domeniul de definiție al funcției definite prin formula obținută la a).

13. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2 - 10x$; b) $f(x) = 5x - 2$.

1) Aflați zeroul funcției f.

2) Trasați graficul funcției f.

3) Utilizând graficul, determinați valorile lui x pentru care: $f(x) > 0$; $f(x) < 0$.

4) Determinați tipul unghiului format de G_f și direcția pozitivă a axei Ox.

5) Determinați dacă funcția f este strict crescătoare.

14. Fie funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $g(x) = 6x$; b) $g(x) = -\frac{1}{4}x$.

1) Aflați zeroul funcției g.

2) Trasați graficul funcției g.

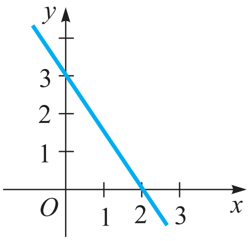
3) Utilizând graficul, determinați valorile lui x pentru care: $g(x) > 0$; $g(x) < 0$.

4) Determinați tipul unghiului format de G_g și de direcția pozitivă a axei Ox.

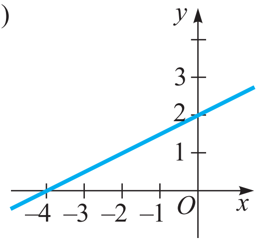
5) Determinați dacă funcția g este strict crescătoare.

15. ***Lucrați în perechi!*** Definiți analitic funcția de gradul I al cărei grafic este reprezentat:

a)

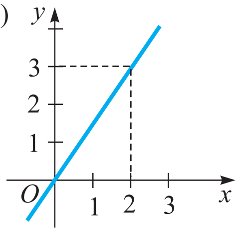


b)

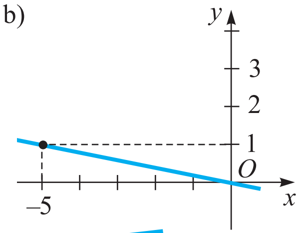


16. Definiți analitic proporționalitatea directă al cărei grafic este reprezentat:

a)



b)



17. Trasați graficul funcției:

a) $f: D(f) \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x - 1$, dacă $-2 \le x \le 1$;

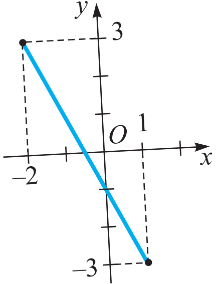
b) $g: D(g) \to \mathbb{R},\ g(x) = 3x - 6$, dacă $1 \le x \le 5$;

c) $h: D(h) \to \mathbb{R},\ h(x) = -x$, dacă $-3 \le x \le 6$;

d) $q: D(q) \to \mathbb{R},\ q(x) = x$, dacă $0 \le x \le 8$.

***Model*:**

a) $D(f) = [-2; 1]$.



☐ ☐ **3**

18. Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = \begin{cases} 5x + 2, & \text{pentru } x \le -1, \\ 3x, & \text{pentru } x > -1; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{pentru } -1 \le x \le 1, \\ 1, & \text{pentru } x < -1, \\ 2x - 1, & \text{pentru } x > 1. \end{cases}$

19. Graficul funcției f este o dreaptă ce trece prin punctele $A(2; 6)$ și $B(-1; 3)$. Definiți analitic funcția f.

20. Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = 2|x| - 1$;

b) $f(x) = 3 - |x|$.

§ 3. Proporționalitatea inversă

Mărimile v şi t, y şi x sunt mărimi .

• Dacă un autobuz parcurge 120 km în t ore, atunci viteza lui este $v = \frac{120}{t}$ km/h. Viteza v este funcție de timpul t.

• Fie aria dreptunghiului 25 m², iar lungimea uneia dintre laturi – x m. Atunci, lungimea laturii a doua este $y = \frac{\square}{\square}$ m. Deci, lungimea y a laturii a doua este o funcție de lungimea x.

În ambele cazuri obținem funcții descrise de formula $f(x) = \frac{k}{x}$.

Definiție

Funcția de forma $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{k}{x}$, unde $k \in \mathbb{R}^*$, se numeşte **proporționalitate inversă**.

• Trasați graficul funcției:

a) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{3}{x}$;

b) $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $g(x) = -\frac{3}{x}$.

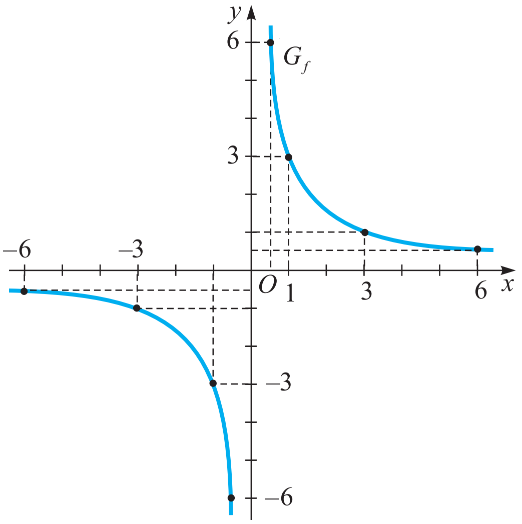
Rezolvare:

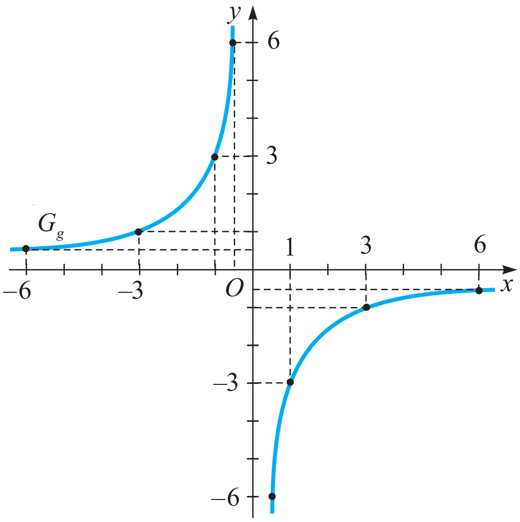
a)

x	-6	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3	6
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-3	-6	6	3	1	$\frac{1}{2}$

b)

x	-6	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3	6
$g(x)$								





Lucrați în grup! • Examinați graficele G_f şi G_g şi completați adecvat:

a) Funcția f nu are zerouri.

b) Graficul G_f nu intersectează nici axa Ox, nici axa Oy.

c) $f(x) > 0$ pentru x ;

$f(x) < 0$ pentru x .

d) Funcția f este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty, 0)$ şi .

a) Funcția g .

b) Graficul G_g .

c) $g(x) > 0$ pentru x ;

$g(x) < 0$ pentru x .

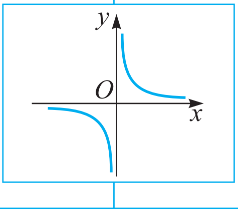
d) Funcția g este strict crescătoare pe intervalele şi $(0, +\infty)$.

Rețineți

Graficul proporționalității inverse se numește ***hiperbolă***.
Hiperbola are două ramuri.

$f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{k}{x},\ k \in \mathbb{R}^*$

$k > 0$

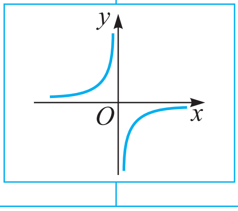


f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$; ramurile hiperbolei sunt situate în cadranele I și III

$f(x) > 0$ pentru $x \in (0, +\infty)$
$f(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, 0)$

Graficul proporționalității inverse este simetric față de originea O a sistemului de axe ortogonale.

$k < 0$



f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$; ramurile hiperbolei sunt situate în cadranele II și IV

$f(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, 0)$
$f(x) < 0$ pentru $x \in (0, +\infty)$

Exerciții și probleme

1

1. Selectați formulele prin care poate fi definită proporționalitatea inversă.

$f(x) = -\frac{7}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$
$f(x) = x + 1$
$f(x) = \frac{5}{x}$

2. Fie funcția $f: \{-5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5\} \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = -\frac{4}{x}$.

a) Compuneți tabelul de valori al funcției f.
b) Trasați graficul funcției f.

3. Fie funcția $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ g(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}$.

Completați tabelul.

x	$-\sqrt{8}$	-2			1	$\sqrt{2}$	2	
$g(x)$			-1	$-\sqrt{2}$				$\frac{1}{2}$

4. ***Investigați!*** *Adevărat* sau *Fals*?

Fie $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{5}{x}$.

a) $A(1; -5) \in G_f$;
b) $B(1; 5) \in G_f$;
c) $C(10; 2) \in G_f$;
d) $D(-5; 1) \in G_f$;
e) $O(0; 0) \in G_f$;
f) $F\left(-25; -\frac{1}{5}\right) \in G_f$.

5. În care cadrane sunt situate ramurile hiperbolei dacă:

a) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = -\frac{\sqrt{10}}{x}$;
b) $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ g(x) = \frac{100}{x}$?

2

6. ***Lucrați în perechi!*** Trasați graficul funcției:

a) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{6}{x}$;
b) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = -\frac{10}{x}$.

Completați adecvat:
1) f este o funcție strict ____;
2) $f(x) > 0$ pentru $x \in$ ____; $f(x) < 0$ pentru $x \in$ ____.
3) Ramurile hiperbolei sunt situate în cadranele ____ și ____.

7. Reprezentați grafic funcția:

a) $f: D(f) \to \mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{12}{x}$, pentru $x \in [-4, 4] \setminus \{0\}$;

b) $g: D(g) \to \mathbb{R}^*,\ g(x)=-\frac{20}{x}$, pentru $x \in [-10, 10] \setminus \{0\}$.

8. Graficul funcției $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{k}{x}$, trece prin punctul $A(2; 1)$. Trece oare G_f prin punctul:

a) $B(1; 2)$; b) $C(-2; -1)$;

c) $D(-1; -2)$; d) $E\left(-2; \frac{1}{2}\right)$?

9. ***Lucrați în perechi!*** Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{1}{x}$, și $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ g(x)=-\frac{1}{x}$. Trageți concluzia.

10. Scrieți formula prin care este definită proporționalitatea inversă, știind că graficul acesteia trece prin punctul:

a) $A(-3; 12)$; b) $B(8; 4)$; c) $C(1; -2)$.

11. Formulați exemple de mărimi invers proporționale din diverse domenii.

☐ ☐ **3**

12. Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$:

a) $f(x)=\frac{2}{|x|}$; b) $f(x)=-\frac{2}{|x|}$.

Trageți concluzia.

13. Rezolvați în $\mathbb{R}^*$, prin metoda grafică, ecuația:

a) $\frac{6}{x}=5+x$; b) $-\frac{3}{x}=4x-1$; c) $\frac{2}{|x|}=x+1$.

14. ***Investigați!*** Demonstrați că, pentru $k<0$ și $a<0$, graficele funcțiilor $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{k}{x}$, și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x)=ax+3$, se intersectează în cadranele II și IV.

15. Compuneți și rezolvați câte un exercițiu de tipul exercițiilor **8**, **10**, **12**.

§4. Funcția $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$

• Descrieți analitic dependența dintre lungimea a a laturii pătratului și aria acestuia.

$\mathcal{A}=a^2$

Explicăm

Așa cum aria pătratului cu latura de lungime a este $\mathcal{A}=a^2$, obținem $a=$ ____. Deci, lungimea laturii pătratului este funcție de aria lui.

Formula prin care se descrie dependența respectivă este de forma $y=\sqrt{x}$.

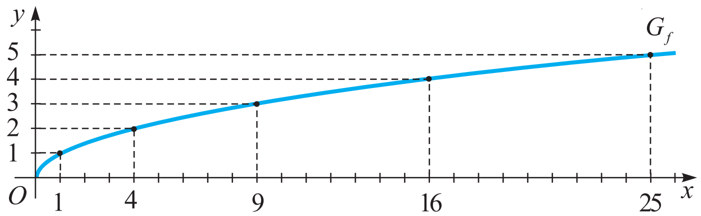
Definiție

Funcția $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$, se numește **funcția *rădăcina pătrată***.

• Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$.

Rezolvare:

x	0	1	4	9	16	25
$f(x)$		1				



Rețineți

Proprietăți ale funcției $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$:

- $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow$ ____ – zeroul funcției f;
- $f(x)>0$ pentru $x \in$ ____;
- pentru orice numere pozitive x_1 și x_2, unde $x_1<x_2$, avem $\sqrt{x_1}$ ____ $\sqrt{x_2}$, deci, funcția f este strict ____;
- $O(0, 0) \in G_f$.

Investigați! • *Adevărat* sau *Fals*?

a) Punctul $A(36;\ 6)$ aparține graficului funcției *rădăcina pătrată*.

b) Punctul $B(10;\ -3)$ aparține graficului funcției *rădăcina pătrată*.

A/F

Rezolvare:

a) $x=36,\ y=\sqrt{\square}=\square$. *Răspuns*: ☐

b) $x=10,\ y=\sqrt{\square}\neq\square$. *Răspuns*: ☐

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Fie $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$. Aflați x, dacă $y\in\left\{1{,}5;\ 3\frac{1}{3};\ 5;\ 7;\ 8{,}1\right\}$.

2. Utilizând graficul funcției *rădăcina pătrată*, calculați y pentru $x\in\{1{,}5;\ 2;\ 7;\ 8;\ 20;\ 24\}$. (Rotunjiți până la zecimi.)

3. **Investigați!** *Adevărat* sau *Fals*? Fie G_f graficul funcției *rădăcina pătrată*.

a) $A(1;\ 2)\in G_f$; b) $B(100;\ 10)\in G_f$; c) $C(1;\ -1)\in G_f$;

d) $D(81;\ 9)\notin G_f$; e) $E(3;\ \sqrt{3})\in G_f$; f) $F(0{,}01;\ 0{,}1)\in G_f$.

A/F

4. Stabiliți dacă graficul funcției *rădăcina pătrată* intersectează dreapta:

a) $y=\sqrt{2}$; b) $y=3{,}5$; c) $y=101$; d) $y=-\sqrt{5}$.

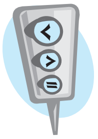
☐ **2** ☐

5. **Lucrați în perechi!** Utilizând graficul funcției *rădăcina pătrată*, comparați numerele:

a) $\sqrt{4{,}5}$ și $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{13{,}5}$ și 3;

c) $\sqrt{4\frac{1}{2}}$ și 2,1; d) $-\sqrt{11}$ și $-2{,}5$;

e) $-\sqrt{29}$ și $-\sqrt{27}$; f) 0 și $\sqrt{1{,}1}$.



6. Graficul funcției $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$, trece prin punctul de abscisă:

a) 49; b) 0,04; c) 121; d) 625.

Aflați ordonata acestui punct.

7. **Investigați!** Aflați toate valorile întregi ale argumentului x pentru care valorile lui $y=\sqrt{x}$ sunt mai mici decât 10.

8. Trasați graficul funcției $f: D \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$, dacă:

a) $0\le x\le 9$; b) $4\le x\le 16$.

☐ ☐ **3**

9. Reprezentați grafic funcția $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{x^2}$; b) $f(x)=\sqrt{|x|}$;

c) $f(x)=(\sqrt{x})^2$; d) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}$.

10. Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{x}-3$; b) $f(x)=\sqrt{x}+1$;

c) $f(x)=5-\sqrt{x}$; d) $f(x)=1-\sqrt{x}$.

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\sqrt{x}=x-2$; b) $\sqrt{x}=\frac{8}{x}$;

c) $\sqrt{x}=6-x$; d) $x+\sqrt{x}+1=0$.

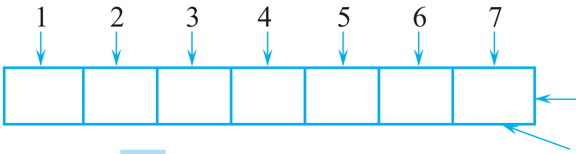
12. Compuneți și rezolvați câte un exercițiu de tipul exercițiilor **9–11**.

§5. Șiruri numerice

5.1. Noțiunea de șir numeric

1 Pentru a participa la competițiile liceale la baschet, Vasile a început să se antreneze zilnic. În prima zi el s-a antrenat 20 de minute, iar în fiecare dintre următoarele zile, pe parcursul unei săptămâni, majora cu 5 minute durata antrenamentelor. Câte minute a durat antrenamentul lui Vasile în ziua a șaptea a săptămânii?

Explicăm Reprezentăm datele problemei schematic astfel:



şir numeric finit

termenul al şaptelea al şirului

Răspuns: ☐ minute.

2 Scriem în ordine crescătoare numerele naturale impare:

$\boxed{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots}$ ⟵ şir numeric infinit

Notăm: $a_1 = 1$, $a_2 =$ ☐, $a_6 =$ ☐ ⟵ termeni ai şirului

3 Fie funcția $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Deci, $f(1) = 1,\ f(2) = \dfrac{1}{2},\ f(3) = \dfrac{1}{3},\ \ldots,\ f(n) = \dfrac{1}{n},\ \ldots$

$\boxed{1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \ldots,\ \dfrac{1}{n},\ \ldots}$ ⟵ şir numeric ☐

Notăm: $a_2 =$ ☐, $a_7 =$ ☐, $a_{53} =$ ☐, $a_n =$ ☐.

Definiție

- **Şir numeric** se numeşte funcția definită pe $\mathbb{N}^*$ cu valori în mulțimea E, $E \subset \mathbb{R}$.
- Dacă funcția f este definită pe o submulțime finită a elementelor consecutive ale mulțimii $\mathbb{N}^*$, atunci se obține un şir **numeric finit**. În caz contrar, şirul obținut se numeşte **şir numeric infinit**.

termeni vecini

$a_1,\quad \underbrace{a_2,\quad a_3}_{}, \ \ldots,\quad a_{n-1},\quad a_n,\quad a_{n+1},\ \ldots$

a_1 ↓ predecesorul termenului a_2

a_{n+1} ↓ succesorul termenului a_n

Şirul numeric se notează cu (a_n), iar termenii lui – cu $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$

5.2. Moduri de definire a unui şir

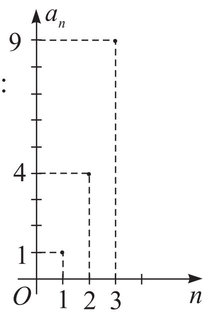
Explicăm **1** Aşa cum şirul numeric este o funcție, el, ca şi funcția, poate fi definit:

sintetic ⟶ *prin enumerarea termenilor lui* ⟶ 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

sintetic ⟶ *grafic* ⟶

analitic ⟶ *prin formula termenului al n-lea* ⟶ $a_n = n^2$

verbal ⟶ *prin cuvinte* ⟶ şirul pătratelor numerelor naturale



Definiție Formula cu ajutorul căreia fiecare termen al șirului numeric se exprimă prin numărul său de ordine (rangul său) se numeşte **formula termenului general** sau **formula termenului de rang *n*** al şirului.

2 Examinați şi continuați:

a) Scriem primii cinci termeni ai şirului (a_n) definit prin formula termenului de rang n:

$a_n = 3^n - 2.$

$a_1 = 3^1 - 2 = 1,\ \ a_2 = 3^{\square} - 2 = \square,\ a_3 = \square,\ a_4 = \square,\ a_5 = \square.$

b) Scriem formula termenului de rang n al şirului (a_n) definit prin enumerarea termenilor săi: $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$

Deoarece $2 = \frac{2}{1}$, obținem şirul (a_n): $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$, cu $a_n = \frac{\square}{n}$.

Observație Pentru şirul definit prin enumerarea câtorva dintre primii termeni ai săi, se pot scrie, de regulă, mai multe formule pentru termenul de rang n.

Fie şirul numeric: 0, 7, 14, 21, …

$a_1 = 0,\ \ a_2 = 0 + 7 = 7,\ \ a_3 = 7 + 7 = 14,\ \ a_4 = 14 + 7 = 21,\ \ldots$

Şirul poate fi definit astfel: $a_1 = 0,\ \ a_{n+1} = a_n + 7.$

Un atare mod de definire a şirului se numeşte ***recurent*** (*recurrere* în limba greacă înseamnă a reveni).

3 Observați şi continuați:

Pentru a defini în mod recurent şirul:

se indică unul sau câțiva dintre primii termeni ai şirului → $a_1 = 1,\ \ a_2 = 1$

se scrie formula ce permite obținerea termenilor următori ai şirului, cunoscând termenii precedenți → $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2;$ $\qquad a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3;$

$a_5 = a_4 + a_3 = \square + \square = \square;$ $\qquad a_6 = \square + \square = \square + \square = \square.$

Am obținut şirul 1, 1, 2, 3, $\square$, $\square$, ..., care se numeşte şirul lui Fibonacci.

INTERESANT ȘI UTIL

Şirul lui Fibonacci se aplică în diverse compartimente ale matematicii: în geometrie, combinatorică, teoria numerelor, analiza matematică. Câteva decenii matematicienii au încercat să definească şirul lui Fibonacci prin formula termenului lui de rang n. Într-un final, această formulă a fost găsită:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Leonardo da Pisa
(Fibonacci)
(1175–1250)

5.3. Şiruri numerice monotone

- Examinaţi şirurile:

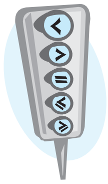
(a_n): 2, 4, 6, 8, …, $2n$, …

(b_n): 3, $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{3}{4}$, …, $\frac{3}{n}$, …

(c_n): 1, 1, 1, 1, …

(x_n): 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

şirul lui Fibonacci



Comparaţi:

a_{n+1} ○ a_n

b_{n+1} ○ b_n

c_{n+1} ○ c_n

x_{n+1} ○ x_n

Definiţii

- Un şir numeric se numeşte **strict crescător** dacă fiecare termen al lui este mai mare decât predecesorul său: $a_{n+1} > a_n$.
- Un şir numeric se numeşte **crescător** dacă fiecare termen al lui nu este mai mic decât predecesorul său: $a_{n+1} \geq a_n$.
- Un şir numeric se numeşte **strict descrescător** dacă fiecare termen al lui este mai mic decât predecesorul său: $a_{n+1} < a_n$.
- Un şir numeric se numeşte **descrescător** dacă fiecare termen al lui nu este mai mare decât predecesorul său: $a_{n+1} \leq a_n$.
- Un şir numeric se numeşte **constant** dacă fiecare termen al acestuia este egal cu predecesorul său: $a_{n+1} = a_n$.

Aplicând definiţiile respective, completaţi adecvat pentru şirurile indicate mai sus:

(a_n) – şir numeric strict crescător;

(b_n) – ______;

(c_n) – ______;

(x_n) – ______.

Definiţie

Şirurile numerice crescătoare, strict crescătoare, descrescătoare şi strict descrescătoare se numesc **monotone**.

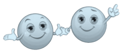
Şirul (y_n): 2, 1, 4, 3, 6, …, $n+(-1)^{n+1}$, ... nu este monoton.

Exerciţii şi probleme

1 ☐ ☐

1. Scrieţi în ordine crescătoare şirul de numere naturale impare formate dintr-o cifră.

2. Scrieţi în ordine crescătoare primii cinci termeni ai şirului de numere naturale divizibile cu 3.

3.  *Lucraţi în perechi!* Scrieţi în ordine descrescătoare şirul fracţiilor subunitare cu numitorul 5.

4. Scrieţi primii cinci termeni ai şirului definit prin formula termenului de rang n:

a) $a_n = 5 - 3n$; b) $a_n = n^2 - n$; c) $a_n = \frac{2n}{n+1}$; d) $a_n = 3 \cdot (-1)^n$.

5. Fie şirul (x_n). Scrieţi:

a) doi termeni consecutivi ai şirului, precedenţi termenului x_{n+1};

b) doi termeni consecutivi ai şirului, următori pentru termenul x_{n+1}.

6. Aflați termenii al treilea, al şaptelea şi al o sutălea ai şirului (c_n) definit prin formula termenului general $c_n = \frac{3}{n+1}$.

7. Utilizând modelul, determinați dacă numerele 3, 5, 17 sunt termeni ai şirului definit prin formula termenului de rang n:

a) $a_n = 3n-1$; b) $b_n = 2n^2+1$.

Model:

a) $a_n = 3n-1$. Rezolvăm în $\mathbb{N}^*$ ecuația: $3n-1=3 \Leftrightarrow 3n=4 \Leftrightarrow n=\frac{4}{3} \notin \mathbb{N}^*$.

Răspuns: Numărul 3 nu este termen al şirului (a_n).

8. ***Lucrați în perechi!***

Şirul (b_n) este definit în mod recurent: $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 3b_n + 1$. Scrieți primii cinci termeni ai acestui şir.

☐ **2** ☐

9. Scrieți primii cinci termeni ai şirului:

a) numerelor naturale care, împărțite la 4, dau restul 3;

b) al cărui termen general a_n este egal cu restul împărțirii lui n la 3.

10. Scrieți şi reprezentați într-un sistem de axe ortogonale cinci termeni ai şirului definit prin formula:

a) $a_n = 2\cdot(-1)^n$; b) $a_n = 1-n$.

11. Aflați termenii al treilea, al şaptelea şi al doisprezecelea ai şirului definit prin formula:

a) $a_n = \frac{(-1)^n+(-1)^{n+1}}{2}$; b) $b_n = \frac{2^n}{2n+1}$; c) $c_n = \frac{(-1)^n}{2n}$.

12. ***Investigați!*** Determinați care dintre şirurile de mai jos este definit prin formula $a_n = \frac{2n-1}{n^2+1}$:

a) $\frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{7}{13}, \frac{13}{21}, \ldots$; b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11}, \ldots$;

c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{7}{17}, \ldots$

13. Aparține şirului definit prin formula termenului general $a_n = n^2-7n+23$ numărul:

a) 11; b) 31; c) 46?

14. Câți termeni negativi conține şirul definit prin formula $a_n = 5n-21$?

15. Scrieți primii cinci termeni ai şirului definit în mod recurent:

a) $a_1 = 27$, $a_{n+1} = \frac{81}{a_n}$; b) $a_1 = 0{,}1$, $a_2 = -0{,}1$, $a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$;

c) $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$; d) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n - 5$.

16. ***Lucrați în grup!***

Demonstrați, utilizând modelul, că şirul definit prin formula:

a) $a_n = 2-3n$ este strict descrescător;

b) $a_n = 2n-5$ este strict crescător.

Model:

Demonstrați că şirul definit prin formula $a_n = \frac{1}{5}n+2$ este strict crescător.

Demonstrație:

$a_{n+1} = \frac{1}{5}(n+1)+2$;

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}n + \frac{1}{5} + 2 - \frac{1}{5}n - 2 = \frac{1}{5} > 0$;

$a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$.

Deci, şirul (a_n) este strict crescător.

☐ ☐ **3**

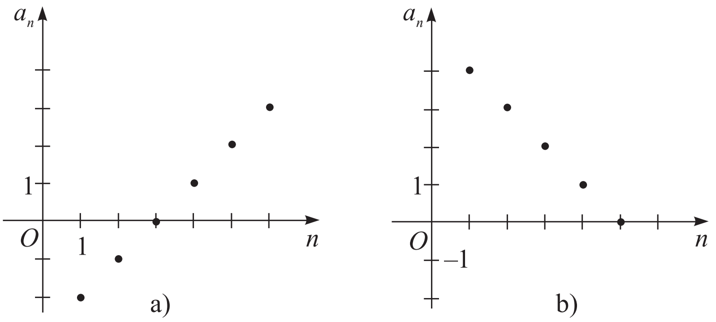
17. Definiți, prin una dintre posibilele formule ale termenului de rang n, şirul:

a) $1, -2, 3, -4, 5, \ldots$;

b) $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$;

c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \ldots$

18. Şirul finit este definit grafic. Definiți analitic acest şir.



a) b)

19. Definiți în mod recurent şirul:

$5, -5, 5, -5, \ldots$.

20. Şirurile (x_n) şi (y_n) sunt definite prin formulele termenilor de rang n: $x_n = 2n-1$ şi $y_n = n^2$. Dacă se vor scrie în ordine crescătoare termenii comuni ai acestor două şiruri, se va obține un nou şir (c_n). Definiți acest şir prin formula termenului de rang n.

21. Demonstrați că șirul definit prin formula:

a) $a_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$ este strict descrescător; b) $c_n = \dfrac{3n+4}{n+2}$ este strict crescător.

22. ***Investigați!*** Şirul (a_n) este definit prin formula termenului general $a_n = 2^n$.
Este adevărată relația $a_{n+1} + a_{n+2} = 6a_n$?

23. ***Lucrați în grup!*** Proiect *Aplicații ale funcțiilor și șirurilor în diverse domenii.*

Exerciții și probleme recapitulative

1 ☐ ☐

1. Determinați cele trei componente ale funcției:

a) $f: \{-2; -1; 0; 1; 2\} \to \{0; 1; 4\},\ f(x) = x^2$; b) $g: \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q},\ g(x) = \dfrac{1}{x}$; c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 3x - 10$.

2. ***Lucrați în perechi!*** Selectați formulele prin care poate fi definită:

a) funcția de gradul I;
b) funcția constantă;
c) proporționalitatea directă;
d) proporționalitatea inversă;
e) funcția rădăcina pătrată.

$\boxed{f(x) = 2 - 3x}$ $\boxed{g(x) = -\sqrt{10}}$ $\boxed{h(x) = 6,(7)x}$ $\boxed{p(x) = x^2 + 1}$ $\boxed{r(x) = \sqrt{x}}$ $\boxed{g(x) = -\dfrac{1}{3x}}$

3. Descrieți printr-un tabel funcția:

a) $f: \{-3; -2; 0; 1; 3; 5\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = 2x + 4$;

b) $f: \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\} \to \mathbb{N},\ f(x) = |x|$;

c) $f: \{x \in \mathbb{N} \mid -2x \geq 9\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x^2 + 1$.

4. Calculați $f(1),\ f(-2),\ f(5),\ f(0{,}1)$, dacă:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 8$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2,(3)$;

c) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{21}{x}$;

d) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$.

5. ***Investigați!*** *Adevărat* sau *Fals*?
Următoarele scrieri definesc o funcție:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2|x|$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -\dfrac{3}{x}$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{N},\ f(x) = x + 1$.

Justificați.

6. ***Lucrați în perechi!*** Aflați domeniul de definiție al funcției definite prin formula:

a) $f(x) = \sqrt{x} + 2$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$;

c) $f(x) = (x-3)^2 + 1$; d) $f(x) = -5\sqrt{x-2}$;

e) $f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$; f) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$.

7. Completați cu numărul potrivit:

a) $A\left(\dfrac{2}{3};\ \square\right) \in G_f$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 10$;

b) $B(2{,}5;\ \square) \in G_f$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -20x$;

c) $C(\square;\ -11) \in G_f$, unde $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{8}{x}$;

d) $D(\square;\ 100) \in G_f$, unde $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$.

8. Scrieți primii cinci termeni ai șirului (c_n) definit în mod recurent: $c_1 = 2,\ c_2 = 1,\ c_{n+1} = 2c_{n-1}$.

9. Şirul (a_n) este definit prin formula termenului general $a_n = 3n - 4$.
a) Scrieți primii zece termeni ai șirului.
b) Reprezentați termenii obținuți într-un sistem de axe ortogonale.

10. Aflați termenul al șaptelea al șirului (a_n): $-7,\ -3,\ 1,\ 5,\ \ldots$

☐ **2** ☐

11. Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$, dacă:

a) $a = 5,\ b = -2$; b) $a = 0,\ b = 0$; c) $a = 0,\ b = -3{,}5$; d) $a = -5,\ b = 0$.

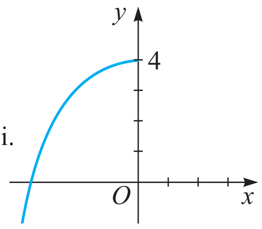
12. Numărul natural m, la împărțirea cu 4, dă câtul n și restul 0. Definiți printr-o formulă dependența dintre m și n.
a) Determinați valoarea funcției pentru $n = 100$. b) Aflați domeniul de definiție și mulțimea de valori ale funcției.

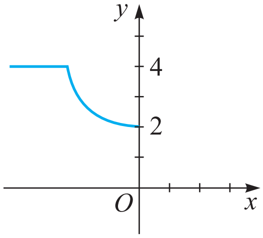
13. ***Lucrați în grup!***

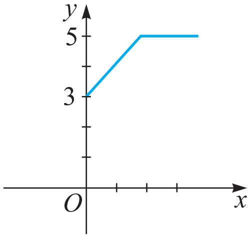
Completați graficul, astfel încât el:

a) să fie graficul unei funcții;

b) să nu reprezinte graficul unei funcții.







14. Trasați graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=1{,}5x-2$; b) $f(x)=-2x-3$; c) $f(x)=-x+3{,}6$.

Determinați proprietățile funcției f.

15. Reprezentați grafic funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{k}{x}$, dacă: a) $k=-\frac{1}{2}$; b) $k=0{,}2$; c) $k=-\frac{2}{5}$; d) $k=1\frac{2}{3}$.

Determinați proprietățile funcției f.

16. Completați cu un număr, astfel încât funcția f să fie: 1) strict crescătoare; 2) strict descrescătoare.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\square\cdot x+1$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\square\cdot x$;

c) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{\square}{x}$; d) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=-\frac{\square}{x}$;

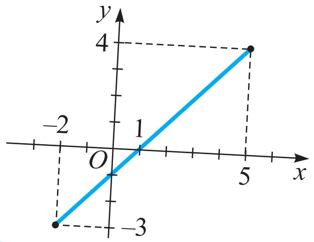
17. Trasați graficul funcției $f: D(f)\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\frac{1}{4}x+2$, dacă $-5\le x\le 5$; b) $f(x)=-3{,}8x$, dacă $0\le x\le 7$;

c) $f(x)=-\frac{1}{4x}$, dacă $1\le x\le 6$; d) $f(x)=\frac{5}{x}$, dacă $-7\le x\le -1$;

Model:

$f: D(f)\to\mathbb{R},\ f(x)=x-1$, dacă $-2\le x\le 5$.



18. ***Lucrați în perechi!*** Completați cu un număr, astfel încât graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\square\cdot x-5$; b) $f(x)=-\square\cdot x+\sqrt{11}$;

c) $f(x)=\square\cdot x$; d) $f(x)=-\square x$

să formeze cu direcția pozitivă a axei Ox: 1) un unghi ascuțit; 2) un unghi obtuz.

19. Graficul funcției $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$, trece prin punctul cu abscisa:

a) 25; b) 100; c) 144.

Aflați ordonata punctului.

20. Determinați dacă graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ conține puncte care au abscisa egală cu ordonata:

a) $f(x)=-3x+1$; b) $f(x)=x-0{,}8$; c) $f(x)=-5x$; d) $f(x)=2x+\sqrt{5}$.

21. ***Lucrați în grup!*** Se ştie că suma de bani care se investeşte (sau se împrumută) pe un termen de t ani cu rata dobânzii de $r\%$ anual se calculează conform formulei $S=L(1+rt)$, unde L este suma inițială de lei. Fie L şi r mărimi fixate.

a) Ce dependență există între S şi t? Justificați.

b) Domnul Mogoreanu a investit în construcție 10 000 de lei cu rata dobânzii de 17% anual. Ce sumă va primi el, dacă termenul de împrumut este de: 1 an; 2 ani; x ani? Scrieți dependența lui S de t în cazul investiției banilor pentru x ani.

c) Cu ce este egal coeficientul unghiular al graficului funcției obținute la b)? Ținând cont de condițiile problemei, care este sensul coeficientului unghiular?

22. Şirul (x_n) este definit prin formula termenului general $x_n=-n^2+4n$. Aflați rangul termenului -45 al acestui şir.

23. Începând cu care rang toți termenii şirului definit prin formula termenului general $a_n=5n-1$ sunt mai mari decât 100?

24. Fie funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x$.

a) Aflați termenul al şaselea al şirului numeric asociat acestei funcții.

b) Aflați rangul termenului 64 al acestui şir.

☐ ☐ 3

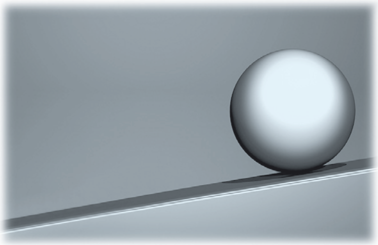
25. Aparține oare graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x + 5,$ punctul de intersecție a graficelor funcțiilor $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2x + 5,$ și $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = -2x - 5?$ Argumentați.

26. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -3x + 1.$

a) Calculați $f(f(-2));\ f(f(f(0))).$

b) Pentru care valori ale lui x, $f(x) = f(f(x))$?

27. O bilă se rostogolește pe o pantă. În prima secundă ea parcurge 0,6 m, iar în fiecare dintre secundele următoare viteza ei crește cu 0,6 m/s. Cât timp se va rostogoli bila pe o pantă cu lungimea de 6 metri?



Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta 1

1. a) Completați astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$ $f(x) = \square\, x + 3,$ să fie strict descrescătoare.

b) Reprezentați grafic funcția f.

c) Aflați zeroul funcției f.

d) Determinați semnul funcției f.

e) Precizați panta graficului funcției f.

2. *Adevărat* sau *Fals*?

A/F

Fie $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = -\dfrac{7}{x}.$

$A\left(\dfrac{1}{7}, 49\right) \in G_f.$

3. Aflați valoarea funcției $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x},$ pentru valoarea argumentului $961.$

4. a) Scrieți formula ce exprimă dependența lungimii cercului de raza acestuia.

b) Este această dependență o proporționalitate directă? Argumentați răspunsul.

5. Un șir (x_n) este definit prin formula termenului de rang n: $x_n = n^2 - 7n + 6.$

a) Scrieți primii cinci termeni ai șirului.

b) Determinați rangul termenului egal cu 24 al acestui șir.

Varianta 2

1. a) Completați astfel încât funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$ $g(x) = \square\, x - 5,$ să fie strict crescătoare.

b) Reprezentați grafic funcția g.

c) Aflați zeroul funcției g.

d) Determinați semnul funcției g.

e) Precizați panta graficului funcției g.

2. *Adevărat* sau *Fals*?

A/F

Fie $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ g(x) = \dfrac{15}{x}.$

$B\left(-\dfrac{1}{3}; -5\right) \in G_g.$

3. Aflați valoarea funcției $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x},$ pentru valoarea argumentului $841.$

4. a) Scrieți formula care exprimă dependența vitezei v de timpul t, fiind dată distanța s.

b) Este această dependență o proporționalitate inversă? Argumentați răspunsul.

5. Un șir (x_n) este definit prin formula termenului de rang n: $x_n = n^2 - n + 6.$

a) Scrieți primii cinci termeni ai șirului.

b) Determinați rangul termenului egal cu 12 al acestui șir.

Capitolul 5 Ecuații de gradul II cu o necunoscută

> *Succesul este suma unor eforturi mici, repetate zi de zi.*
>
> Robert Collier

§1. Noțiunea de ecuație de gradul II cu o necunoscută

1 Pentru sărbătorile de Crăciun fiecare membru al familiei Guțu a pregătit câte un cadou pentru fiecare dintre ceilalți membri ai familiei. Astfel, sub pomul de Crăciun sunt 30 de cadouri. Din câte persoane este formată familia Guțu?

Rezolvăm Fie familia Guțu este formată din x persoane. Atunci, fiecare membru al familiei a pregătit $(x-1)$ cadouri. Deci,

$$x\cdot(x-1)=30 \Leftrightarrow \boxed{x^2-x-30=0} \longleftarrow \text{ecuație de gradul II cu o necunoscută}$$

$$x^2-x-30=0 \Leftrightarrow x^2-6x+5x-30=0 \Leftrightarrow x(x-6)+5(x-6)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-6)(x+5)=0 \Leftrightarrow x-6=0 \text{ sau } x+5=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=6 \text{ sau } x=-5 \text{ – nu corespunde condițiilor problemei.}$$

Răspuns: Familia este formată din 6 persoane.

Definiție

Ecuația de forma

$$\underset{\text{primul coeficient}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x^2}+\underset{\text{coeficientul al doilea}}{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}+\underset{\text{termenul liber}}{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{=0},$$

unde $a\neq 0$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, se numește **ecuație de gradul II cu o necunoscută**.

Pentru $b=0$, $c\neq 0$ avem $ax^2+c=0$

Pentru $b\neq 0$, $c=0$ avem $ax^2+bx=0$

Pentru $b=0$, $c=0$ avem $ax^2=0$

ecuații de gradul II, forma incompletă

2 Examinați şi completați:

a) $\underbrace{5}x^2\underbrace{-7}x\underbrace{-12}=0$;

$a=5$; $b=-7$; $c=-12$.

b) $3x^2+2x-5=0$;

$a=\square$; $b=\square$; $c=\square$.

c) $\sqrt{2}x^2-x=0$;

$a=\sqrt{2}$; $b=-1$; $c=0$.

d) $x^2-4=0$.

$a=\square$; $b=\square$; $c=\square$.

- Care dintre ecuațiile a)–d) sunt incomplete?

Rețineți

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \underset{\underset{1}{\parallel}}{\boxed{\frac{a}{a}}}x^2+\underset{\underset{p}{\parallel}}{\boxed{\frac{b}{a}}}x+\underset{\underset{q}{\parallel}}{\boxed{\frac{c}{a}}}=0,\ a\neq 0,\ a, b, c\in \mathbb{R}.$$

$x^2+px+q=0$ – **ecuație de gradul II, forma redusă**.

- Examinați și completați:

a) $3x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0$

$a=\square;\ b=\square;\ c=\square;\ p=\square;\ q=\square.$

b) $2x^2+6x+5 \Leftrightarrow x^2+\square x+\square=0$

$a=\square;\ b=\square;\ c=\square;\ p=\square;\ q=\square.$

Exerciții și probleme

1 □ □

1. Fie ecuațiile:

a) $2x^2-x-1=0$; b) $-\sqrt{3}x^2+5x+3{,}2=0$;

c) $6x^2-1=0$; d) $-2{,}5x^2+3x=0$;

e) $x^2+1=0$; f) $x^2=0$.

1) Pentru fiecare ecuație completați:

$a=\square;\ b=\square;\ c=\square.$

2) Determinați care dintre ecuațiile a)–f) sunt incomplete.

2. Aflați primul coeficient, coeficientul al doilea și termenul liber ai ecuației de gradul II cu o necunoscută:

a) $x^2+x+1=0$; b) $-0{,}7x^2-3x+0{,}5=0$;

c) $\sqrt{7}x^2+2=0$; d) $-7x^2-5=0$;

e) $x^2=0$; f) $\sqrt{2}x^2-\sqrt{5}x=0$;

3. Completați adecvat:

a) $6x^2-12x+18=0 \Leftrightarrow x^2-2x+3=0$

$a=\square;\ b=\square;\ c=\square;\ p=\square;\ q=\square.$

b) $-0{,}5x^2-x+4=0 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0$

$a=\square;\ b=\square;\ c=\square;\ p=\square;\ q=\square.$

4. *Lucrați în perechi!* Fie $a=3,\ b=-2$ și $c=8$. Scrieți ecuația de gradul II cu o necunoscută, utilizând datele indicate.

5. Fie:

a) $p=2,\ q=-1{,}5$; b) $p=-3,\ q=\sqrt{2}$; c) $p=\frac{1}{2},\ q=\frac{3}{5}$.

Utilizând aceste date, scrieți ecuația de gradul II cu o necunoscută, forma redusă.

□ **2** □

6. Fie ecuațiile:

$x^2-\sqrt{3}=0,\quad -1{,}1x^2-5x=0,\quad 3x^2+x=5,$

$x^2+x+1=0,\quad -2x^2=x-5,\quad \sqrt{x}-3x^2=1,$

$\sqrt{5}x+\sqrt{2}=0,\quad 3x^2-6x+2=0,\quad 3x^2+2=0.$

Selectați ecuațiile de gradul II cu o necunoscută.

7. *Lucrați în perechi!* Completați astfel încât să obțineți ecuația de gradul II, forma redusă, echivalentă cu cea dată.

a) $2x^2-x-4=0 \Leftrightarrow \square x^2-\square x-\square=0$;

b) $5x^2+x=0 \Leftrightarrow x^2+\square x+\square=0$;

c) $-3x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow \square x^2+\square x-\square=0$;

d) $\sqrt{2}x^2+\sqrt{4}x+\sqrt{6}=0 \Leftrightarrow x^2+\square x+\square=0$.

8. Aduceți ecuația la forma $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$:

a) $(x-1)(x+1)=x(3x-2)$;

b) $(\sqrt{2}x+1)^2-3=2(5x-0{,}5)$;

c) $(x+1)(x+2)=(2x-1)(x-3)$;

d) $(x-5)(3x+2)=(5x-3)(x+4)$.

9. *Lucrați în grup!* Scrieți în casetă o ecuație echivalentă cu cea dată.

a) $2x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow \square$

b) $-3t^2+t-\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow \square$

c) $4m^2-8m=0 \Leftrightarrow \square$

d) $2z^2+5=0 \Leftrightarrow \square$

10. Completați astfel încât să obțineți ecuația de gradul II cu o necunoscută, forma redusă.

a) $(2x+3)(2x-3)=-2x+3 \Leftrightarrow \square x^2+\square x-\square=0 \Leftrightarrow x^2+\square x-\square=0$;

b) $(1-x)(2x+5)-7=0 \Leftrightarrow \square x^2-\square x-\square=0 \Leftrightarrow x^2+\square x+\square=0$;

c) $2-x^2=(1-\sqrt{5}x)(1+\sqrt{5}x) \Leftrightarrow \square x^2+\square x+\square=0 \Leftrightarrow x^2+\square x+\square=0$;

d) $(2x+1)(1-3x)-5=0 \Leftrightarrow \square x^2-\square x-\square=0 \Leftrightarrow x^2+\square x+\square=0$.

11. Formulați câte 3 exemple de ecuații de gradul II cu o necunoscută pentru fiecare dintre cele 3 tipuri de ecuații de forma incompletă.

12. Formulați câte 3 exemple de ecuații de gradul II cu o necunoscută, forma redusă.

☐ ☐ **3**

13. Rezolvați în ℝ ecuația utilizând metoda descompunerii în factori:

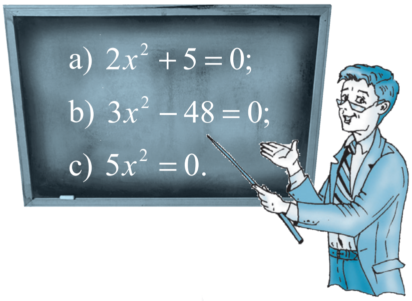
a) $x^2-4x+3=0$;
b) $x^2+4x+3=0$;
c) $x^2-5x+4=0$;
d) $x^2+12x+32=0$.

14. Produsul a două numere naturale consecutive este cu 109 mai mare decât suma acestora. Aflați aceste numere naturale.

§2. Rezolvarea ecuațiilor de gradul II, forma incompletă

2.1. Rezolvarea ecuațiilor de forma $ax^2+c=0,\ a\neq 0,\ a, c\in \mathbb{R}$

1 Profesorul le-a propus elevilor să rezolve ecuațiile:



a) Dinu a răspuns imediat că prima ecuație nu are soluții.

Sunteți de acord cu el? Argumentați.

b) Examinați și completați pentru a obține rezolvarea ecuației $3x^2-48=0$.

Rezolvare:

Metoda I

$3x^2-48=0 \Leftrightarrow 3(x^2-16)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x+4)(x-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+4=0$ sau $x-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\square$ sau $x=\square$.

Metoda II

$3x^2-48=0 \Leftrightarrow 3x^2=48 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow$

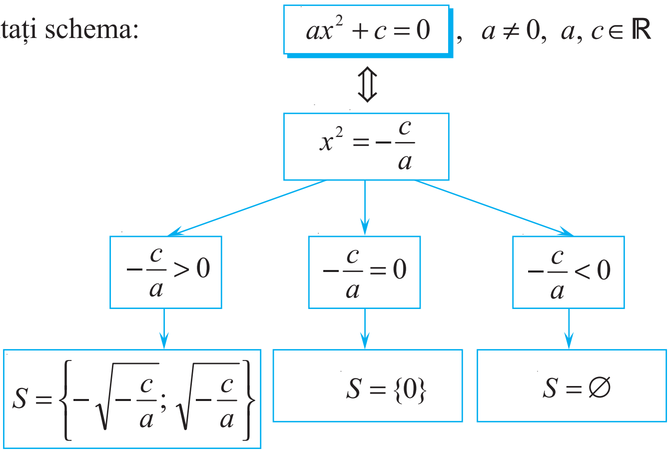
$\Leftrightarrow x=\square$ sau $x=\square$.

Răspuns: $S=\{\square;\ \square\}$.

c) $5x^2=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

Răspuns: $S=\{0\}$.

2 Examinați şi comentați schema:



2.2. Rezolvarea ecuațiilor de forma $ax^2+bx=0,\ a\neq 0,\ a, b\in\mathbb{R}$

Model:

$3x^2-x=0 \Leftrightarrow x(3x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$

sau $3x-1=0 \Leftrightarrow x=0$ sau $x=\frac{1}{3}$.

Răspuns: $S=\left\{0;\ \frac{1}{3}\right\}$.

Examinați modelul şi continuați rezolvarea:

$2x^2+18x=0 \Leftrightarrow 2x\cdot(\square+\square)=0 \Leftrightarrow \square=0$

sau $\square+\square=0 \Leftrightarrow x=\square$ sau $x=\square$.

Răspuns: $S=\{\square;\ \square\}$.

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Completați astfel încât să obțineți ecuația de forma $ax^2+c=0,\ a\neq 0,\ a,\ c\in\mathbb{R}$:

a) $2x^2-\square=0$; b) $-3\square+5=0$;

c) $\square x^2-\square=0$; d) $\sqrt{2}x^{\square}+\square=0$;

e) $\square x^2+\square=0$; f) $\square-2x^2=0$.

2. Fie ecuațiile:

$x^2-25=0$, $\sqrt{7}x^2-x-1=0$, $2x^2-4=0$,

$x^2-x=-1$, $6x^2-5x=0$, $x^2+16=0$.

a) Selectați ecuațiile de forma $ax^2+c=0,\ a\neq 0,\ a,\ c\in\mathbb{R}$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile selectate.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $3x^2-27=0$; b) $t^2-121=0$;

c) $-5u^2+125=0$; d) $-2z^2-32=0$.

4. *Lucrați în perechi!* Completați astfel încât să obțineți ecuația de forma $ax^2+bx=0,\ a\neq 0,\ a,\ b\in\mathbb{R}$:

a) $2x^2+\square x=0$; b) $-\sqrt{5}x^2-\square x=0$;

c) $\square x^2+1{,}5x=0$; d) $\square x^2-\square x=0$;

e) $\square x^{\square}+\square x=0$; f) $\square x^{\square}-\square x=0$.

5. Fie ecuațiile:

$x^2-2x=3$, $x^2-5x=0$, $x^2+\sqrt{5}=0$,

$2x^2+10x=0$, $x^2+x+1=0$, $-3x^2+27x=0$.

a) Selectați ecuațiile de forma $ax^2+bx=0,\ a\neq 0,\ a,\ b\in\mathbb{R}$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile selectate.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $y^2-\sqrt{10}y=0$; b) $1{,}4t^2+2{,}8t=0$; c) $-3z^2+9z=0$.

7. Aflați soluțiile ecuației:

a) $4{,}82x^2=0$; b) $-50t^2=0$;

c) $3\sqrt{2}z^2=0$; d) $-0{,}8y^2=0$.

☐ **2** ☐

8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $(x-1)(x+1)=2(x^2-5)$; b) $2x+(x-1)^2=3x^2+8$; c) $(5x-1)^2-1=0$;

d) $(t+3)(t-5)=-15$; e) $17-(a-3)(a-4)=-a^2+2a$; f) $8z^2-(z+3)^2=-6(z+4)$.

9. *Lucrați în grup!* Aflați soluțiile reale ale ecuației:
a) $4x^2-6x+8=2x^2+x+8$; b) $20-5x^2=x^2+20-x$;
c) $-7t^2+10t+10=10t+3$; d) $1-4y+5y^2=y^2-4y+1$.

10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $x^2-2x+1=0$; b) $4t^2+4t+1=0$;
c) $z^2-6z+9=0$; d) $25a^2+10a+1=0$.

☐ ☐ **3**

11. Pentru care valori ale lui x este adevărată egalitatea:
a) $(3x+1)^2=3x+1$; b) $(x+3)^2=(x-4)^2$?

12. Rezolvați în $\mathbb{R}$, în raport cu x, ecuația:
a) $x^2=a$; b) $x^2=a^2$;
c) $x^2+2b=0$; d) $x^2+16b^2=0$.

§3. Rezolvarea ecuațiilor de forma $a(x+m)(x+n)=0,\ a\in\mathbb{R}^*$

Model:
$3(x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow x-1=0$
sau $x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ sau $x=-2$.
Răspuns: $S=\{-2,\ 1\}$.

Examinați modelul și continuați rezolvarea:

a) $\sqrt{2}(x+3)(x+1{,}5)=0 \Leftrightarrow \square=0$ sau $\square=0$
$\Leftrightarrow x=\square$ sau $x=\square$.
Răspuns: $S=\square$.

b) $(5x-15)(x+\sqrt{5})=0 \Leftrightarrow 5(x-\square)(x+\sqrt{5})=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x-\square=0$ sau $x+\square=0 \Leftrightarrow x=\square$ sau $x=\square$.
Răspuns: $S=\square$.

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Completați astfel încât să obțineți ecuație de forma $(x+m)(x+n)=0$, apoi rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația obținută:
a) $(x+\square)(x-20)=0$; b) $(x-2{,}3)(x+\square)=0$; c) $(x-\square)(x+\square)=0$; d) $(\square-x)(\square+x)=0$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $(2x+4)(x-\sqrt{7})=0$; b) $(t-\sqrt{15})(5t-20)=0$; c) $(3z-1)(3z+1)=0$; d) $(6-2x)(3x+12)=0$.

3. *Lucrați în perechi!* Aflați soluțiile reale ale ecuației:
a) $-3(x+1)(x-2)=0$; b) $\sqrt{2}(t-3)(7-t)=0$; c) $3{,}2(z+1{,}2)(z+7{,}8)=0$; d) $-5{,}5(1-x)(3+x)=0$.

☐ **2** ☐

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\frac{3x+2}{1{,}2}\cdot\frac{1-2x}{3}=0$; b) $(2+\sqrt{2}x)(11-\sqrt{11}x)=0$;
c) $(\sqrt{7}x-7)(10-\sqrt{10}x)=0$; d) $\frac{\sqrt{3}x-3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}x-5}{\sqrt{5}}=0$.

5. Aduceți la forma $a(x+m)(x+n)=0,\ a\neq 0$, ecuația:
a) $(x+10)^2-4(x+10)=0$; b) $(x-3{,}5)^2+2(x-3{,}5)=0$;
c) $(x-\sqrt{21})^2-x+\sqrt{21}=0$; d) $x-4{,}5+2(x-4{,}5)^2=0$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația utilizând metoda descompunerii în factori:
a) $(x-3)^2-4(x-3)=0$; b) $1{,}5(x+2)-(x+2)^2=0$;
c) $(5x+20)^2-(x+4)=0$; d) $2(x+6)+(6x+36)^2=0$.

7. ***Investigați!*** Pentru care valori ale lui x valoarea funcției f este egală cu 0, dacă:

a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3(1-x)(2+x)$; b) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-8(10-x)(10+x)$;

c) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(5+x)^2-5-x$; d) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2-x+6(2-x)^2$.

8. Aflați suma soluțiilor ecuației:

a) $5(x+18)(x-4)=0$;

b) $-\sqrt{13}(1-a)(1+a)=0$;

c) $2{,}14(t-35)(t+105)=0$;

d) $-4(5{,}1-z)(6{,}9-z)=0$.

9. Aflați produsul soluțiilor ecuației:

a) $(x-7{,}5)(x+4)=0$;

b) $3(t-\sqrt{2})(t-\sqrt{12{,}5})=0$;

c) $-\sqrt{21}(6{,}25-t)(4-t)=0$;

d) $-2{,}84(z+\sqrt{30})(z+\sqrt{7{,}5})=0$.

☐ ☐ **3**

10. Examinați modelul și rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $x^2+4x-21=0$; b) $25t^2-10t-3=0$;

c) $49a^2-14a-8=0$; d) $3z^2-2\sqrt{3}z-15=0$.

11. Aflați suma și produsul soluțiilor ecuației:

a) $-\sqrt{2}\left(x-\dfrac{\sqrt{7}+1}{2}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{7}+1}{2}\right)=0$;

b) $2,(5)\left(x-\dfrac{6{,}3+3\sqrt{11}}{4}\right)\left(x+\dfrac{6{,}3-3\sqrt{11}}{4}\right)=0$;

c) $11t^2+2\sqrt{11}t-120=0$;

d) $-20z^2+4\sqrt{5}z+624=0$.

Model:

$x^2-6x-40=0 \Leftrightarrow$

$x^2-6x+9-49=0 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2-49=0 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2-7^2=0 \Leftrightarrow$

$(x-3-7)(x-3+7)=0 \Leftrightarrow$

$(x-10)(x+4)=0 \Leftrightarrow x-10=0$

sau $x+4=0 \Leftrightarrow x=10$ sau $x=-4$

Răspuns: $S=\{-4;\ 10\}$.

§4. Formula de rezolvare a ecuației de gradul II cu o necunoscută, forma completă

1 Examinați rezolvarea:

a) $x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x^2+2\cdot\boxed{2}x+\boxed{2}^2)}_{(x+\boxed{2})^2}-\boxed{2}^2-5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)^2-9=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2=3$ sau $x+2=-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1$ sau $x=-5$.

Răspuns: $S=\{-5;\ 1\}$.

b) $x^2-7x+15=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[x^2-2\cdot\boxed{\dfrac{7}{2}}x+\left(\boxed{\dfrac{7}{2}}\right)^2\right]-\left(\boxed{\dfrac{7}{2}}\right)^2+15=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2-\dfrac{49}{4}+15=0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}=0 \Leftrightarrow$

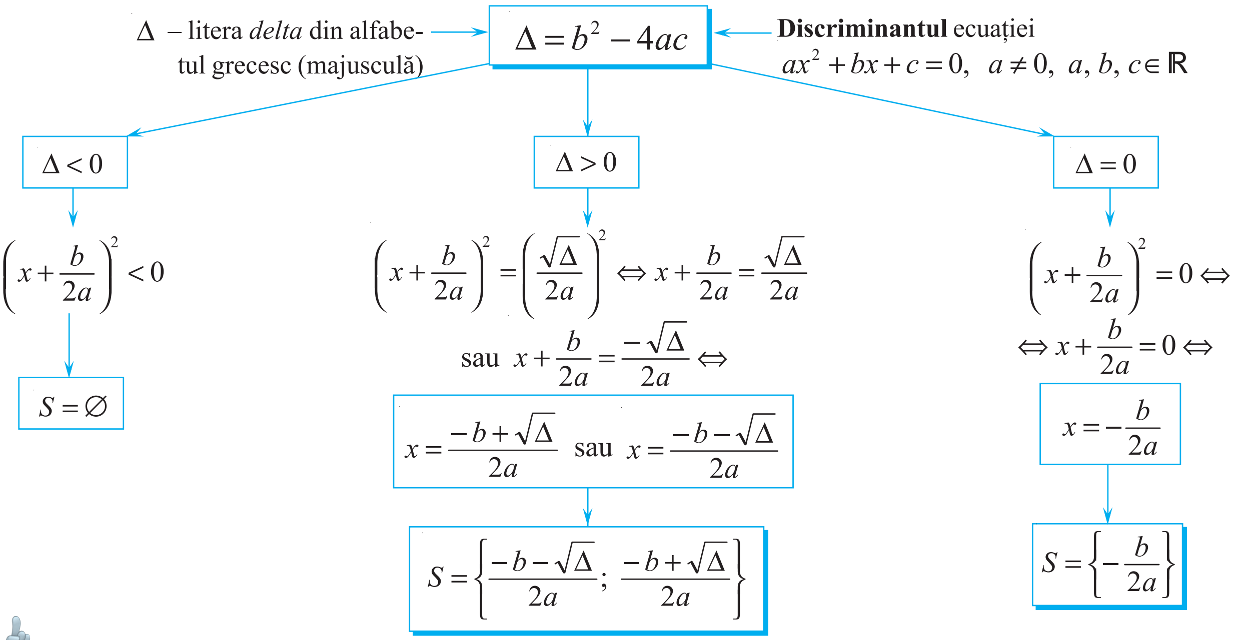
$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2=-\dfrac{11}{4}$.

Răspuns: $S=\varnothing$.

Pentru cazul general obținem:

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow \left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\boxed{b^2-4ac}\longleftarrow ?}{\boxed{4a^2}\longleftarrow \text{număr pozitiv}}$$



Δ – litera *delta* din alfabetul grecesc (majusculă)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Discriminantul ecuației $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,\ a, b, c\in\mathbb{R}$

$\Delta<0$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$$

$$S=\varnothing$$

$\Delta>0$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

sau $x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-\sqrt{\Delta}}{2a}\Leftrightarrow$

$$x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ sau } x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\ \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

$\Delta=0$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=0\Leftrightarrow$$

$$x=-\frac{b}{2a}$$

$$S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$$

Rețineți

Formulele de calcul ale soluțiilor ecuației de gradul II cu o necunoscută $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0,\ a, b, c\in\mathbb{R}$ sunt: $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, unde $\Delta=b^2-4ac$.

2 Examinați și completați astfel încât să obțineți soluțiile reale ale fiecărei ecuații:

a) $5x^2-3x-2=0;$

$a=5;\ b=-3;\ c=-2.$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot5\cdot(-2)=49>0;$

$x_1=\dfrac{3+\sqrt{49}}{10};\ x_2=\dfrac{3-\sqrt{49}}{10}.$

$x_1=1;\ x_2=-\dfrac{2}{5}.$

Răspuns: $S=\left\{-\dfrac{2}{5};1\right\}.$

b) $4x^2-12x+9=0;$

$a=4;\ b=12;\ c=9.$

$\Delta=(-12)^2-4\cdot4\cdot9=0;$

$x=\dfrac{12}{8}.$

$x=$ □.

Răspuns: $S=$ {□}.

c) $x^2-5x+7=0;$

$a=1;\ b=-5;\ c=7.$

$\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot7=$

$=-3$ ○ □.

Răspuns: $S=$ □.

Observație Dacă al doilea coeficient al ecuației de gradul II cu o necunoscută este un număr par, adică $b=2p$, atunci pentru aflarea soluțiilor ecuației poate fi utilizată formula:

$$x_1=\frac{-p-\sqrt{\dfrac{\Delta}{4}}}{a};\ x_2=\frac{-p+\sqrt{\dfrac{\Delta}{4}}}{a},\ \text{unde } \frac{\Delta}{4}=p^2-ac>0.$$

3 Demonstrați formulele de calcul ale ecuației de gradul II pentru cazul $b=2p$.

DIN ISTORIE...

Papirusurile și documentele istorice găsite demonstrează că ecuațiile de gradul II se rezolvau deja în Babilonul antic (circa 2000 de ani î.H.).

Matematicienii din Grecia antică rezolvau unele tipuri de ecuații de gradul II prin metoda reprezentărilor geometrice.

Regula generală de rezolvare a ecuației de gradul II a fost formulată de matematicianul german M. Stiefel (1486–1567). Matematicianul francez F. Viète (1540–1603) a dedus formula de rezolvare a ecuației de gradul II, însă afirmațiile savantului se refereau numai la soluțiile pozitive (el nu recunoștea numerele negative).

François Viète

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Completați astfel încât să obțineți o ecuație de gradul II cu o necunoscută, forma completă:

a) $2x^2-\square x+8=0$;

b) $-5{,}2x^2+x-\square=0$;

c) $\square x^2+2x+1=0$;

d) $\square x^2-3{,}1x+\sqrt{10}=0$;

e) $-\sqrt{3}x^2+\square x-\square=0$;

f) $\square x^2+\square x+\square=0$.

2. Rezolvați în ℝ ecuația aplicând metoda descompunerii în factori:

a) $x^2+2x-8=0$; b) $t^2-12t-28=0$;

c) $4z^2-8z-12=0$; d) $9a^2+6a-63=0$.

3. Aflați discriminantul ecuației:

a) $x^2+2x-8=0$; b) $t^2-12t-28=0$;

c) $4z^2-8z-12=0$; d) $9a^2+6a-63=0$;

e) $-2t^2+3t-1=0$; f) $z^2-6z+10=0$.

4. *Lucrați în perechi!* Determinați semnul discriminantului ecuației:

a) $2x^2-x+9=0$; b) $5t^2+10t-1=0$;

c) $-z^2+1{,}5z-4=0$; d) $5u^2-\sqrt{5}u-20=0$.

5. Aflați discriminantul și determinați numărul de soluții ale ecuației:

a) $25x^2-10x+1=0$; b) $t^2-8t+16=0$;

c) $49z^2+14z+1=0$; d) $2u^2-6\sqrt{2}u+9=0$.

6. Rezolvați în ℝ ecuația folosind formulele de calcul ale soluțiilor ecuației de gradul II cu o necunoscută:

a) $x^2+2x-8=0$; b) $t^2-12t-28=0$;

c) $4z^2-8z-12=0$; d) $9a^2+6a-63=0$;

e) $25x^2-10x+1=0$; f) $t^2-8t+16=0$.

7. Arătați că ecuația este echivalentă cu ecuația de gradul II cu o necunoscută:

a) $(4x-2)(4x+1)+(x-5)^2=21$;

b) $(2x+1)^2-3x(x-5)-1=0$;

c) $(x-3)(x^2-2x+4)=x(x-2)(x+5)$.

☐ **2** ☐

8. Rezolvați în ℝ ecuația:

a) $4x^2+7x+3=0$; b) $8t^2+t-75=0$;

c) $z^2+z-56=0$; d) $u^2-u-1=0$;

e) $x^2-x-56=0$; f) $3u^2-11u-14=0$.

9. *Lucrați în grup!* Determinați pentru care valori ale lui x este adevărată egalitatea:

a) $(4x-5)^2=4(x-5)^2$; b) $(4x+5)^2=5x^2+40x$;

c) $(x+2)^2+(x-3)^2=13$; d) $(2x+1)(2x-1)=3x^2+2x$.

10. Aflați suma și produsul soluțiilor ecuației:

a) $x^2-2x-9=0$; b) $x^2-x-12=0$;

c) $3x^2-5x+2=0$; d) $2t^2-5t-10=0$.

11. *Lucrați în perechi!* Pentru care valori ale lui x:

a) expresia $x^2-10x+26$ ia valoarea 1;

b) valorile expresiilor x^2-4x-3 și $2x-11$ sunt egale;

c) valorile expresiilor $-2x^2+5x+6$ și $4x^2+5x$ sunt egale?

12. Aflați soluțiile întregi ale ecuației:

a) $\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{5}x=\frac{4}{5}x^2+\frac{3}{4}$;

b) $\frac{8t-7}{3}=\frac{t^2+t}{2}$;

c) $\frac{z^2-1}{2}-11z=11$.

13. Aflați trei numere întregi consecutive suma pătratelor cărora este egală cu 869.

14. *Investigați!* Există oare valori ale lui t pentru care este adevărată egalitatea:

a) $9t^2+0{,}36=3t+0{,}6$; b) $0{,}16t^2-1{,}2=0{,}4t-1{,}44$?

În caz că există, aflați aceste valori.

15. Rezolvați în ℝ ecuația folosind formulele de calcul ale soluțiilor pentru cazul $b=2k$:

a) $x^2-22x-23=0$; b) $3t^2-14t+10=0$;

c) $z^2+2z-80=0$; d) $7u^2-20u+14=0$;

e) $15x^2-22x-37=0$; f) $5t^2-20t-4=0$.

☐ ☐ **3**

16. Aflați coeficientul b și rezolvați în ℝ ecuația:

a) $2x^2+bx-10=0$, știind că o soluție a ei este 5;

b) $(b-1)x^2-(b+1)x-72=0$, știind că o soluție a ei este 3.

17. Scrieți ecuația de gradul II cu o necunoscută mulțimea soluțiilor căreia este:

a) $S=\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$; b) $S=\{2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}\}$.

18. Demonstrați că cea mai mică valoare a expresiei $x^2-10x+37$ este numărul 12.

§5. Rezolvarea ecuațiilor de gradul II, forma redusă

***Model*:**

Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația $x^2-7x-8=0$.

Rezolvare:

Avem $p=-7,\ q=-8$.

Atunci $\Delta_1=p^2-4q=(-7)^2-4\cdot(-8)=81$.

Ecuația are două soluții:

$$x_1=\frac{-p-\sqrt{\Delta_1}}{2}=\frac{7-\sqrt{81}}{2}=\frac{7-9}{2}=-1;$$

$$x_2=\frac{-p+\sqrt{\Delta_1}}{2}=\frac{7+\sqrt{81}}{2}=\frac{7+9}{2}=8.$$

Răspuns: $S=\{-1;\ 8\}$.

• Examinați modelul și continuați rezolvarea:

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2+7x-8=0$.

Rezolvare:

Avem $p=\square$, $q=\square$.

Atunci $\Delta_1=p^2-4q=\square^2-\square\cdot\square=81$.

Ecuația are două soluții:

$$x_1=\frac{-p-\sqrt{\Delta_1}}{2}=\frac{\square-\square}{2}=\frac{\square-\square}{2}=\square,$$

$$x_2=\frac{-p+\sqrt{\Delta_1}}{2}=\frac{\square-\square}{2}=\frac{\square-\square}{2}=\square.$$

Răspuns: $S=\square$.

Exerciții și probleme

1 □ □

1. Scrieți ecuația de gradul II, forma redusă, dacă:

a) $p=-2,\ q=3$; b) $p=3,\ q=1$; c) $p=\sqrt{5},\ q=-5$; d) $p=-1{,}2,\ q=2{,}5$.

2. Aflați Δ_1 pentru fiecare ecuație:

a) $x^2-2x-15=0$; b) $x^2+2x-15=0$; c) $x^2-2x+15=0$; d) $x^2+2x+15=0$.

3. ***Lucrați în perechi!*** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $x^2-3x+2=0$; b) $x^2+3x+2=0$; c) $x^2-3x-2=0$; d) $x^2+3x-2=0$.

□ **2** □

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $x^2+3x-40=0$; b) $x^2-2x-48=0$;

c) $x^2+19x+88=0$; d) $x^2-3x-40=0$.

5. Aflați suma și produsul soluțiilor ecuației:

a) $x^2+9x+20=0$; b) $x^2-16x+63=0$;

c) $x^2-x-56=0$; d) $x^2+0{,}5x-1{,}2=0$.

6. ***Lucrați în perechi!*** Determinați semnele soluțiilor ecuației fără a o rezolva:

a) $x^2-18x+17=0$; b) $x^2-3x-1=0$;

c) $x^2+\sqrt{6}x+1=0$; d) $x^2+5x-6=0$.

7. Una dintre soluțiile ecuației $x^2+px-35=0$ este egală cu 5. Aflați soluția a doua și coeficientul p.

8. Una dintre soluțiile ecuației $10x^2-33x+c=0$ este egală cu –2. Aflați soluția a doua și coeficientul c.

9. ***Lucrați în grup!*** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\dfrac{x(x-3)}{6}=\dfrac{x}{2}-1$; b) $\dfrac{x(x+1)}{4}=3-\dfrac{8+x}{4}$;

c) $\dfrac{x(x-5)}{3}=\dfrac{x}{2}+1$; d) $2-\dfrac{5+x}{5}=x^2-4$.

□ □ **3**

10. Fie ecuația $x^2+2x+c=0$ și $x_1,\ x_2$ – soluțiile ei. Știind că $x_1-x_2=6$, aflați c.

11. Demonstrați că ecuația $8x^2+213x-7=0$ nu poate avea soluții de același semn.

§6. Relațiile lui Viète

1 Rezolvați în ℝ ecuația:

1) $x^2-3x+2=0$; 2) $2x^2-7x+3=0$.

Examinăm

Ecuația Soluțiile

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1.} & \boxed{x^2-3x+2=0} \arrow[rr] & & \boxed{x_1=1;\quad x_2=2} & \\
\boxed{-(x_1+x_2)} \arrow[ur] & \boxed{x_1\cdot x_2} \arrow[u] & & \boxed{x_1+x_2=3} \arrow[lll, bend left] & \boxed{x_1\cdot x_2=2} \arrow[lll, bend left]
\end{tikzcd}$$

Relațiile lui Viète

Ecuația

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{2.} & \boxed{2x^2-7x+3=0} & \Leftrightarrow & & \\
\Leftrightarrow & \boxed{x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0} \arrow[rr] & & \boxed{x_1=\frac{1}{2};\quad x_2=3} \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\boxed{-(x_1+x_2)} \arrow[ur] & \boxed{x_1\cdot x_2} \arrow[u] & & \boxed{x_1+x_2=\frac{7}{2}} \arrow[lll, bend left] & \boxed{x_1\cdot x_2=\frac{3}{2}} \arrow[lll, bend left]
\end{tikzcd}$$

Soluțiile

Relațiile lui Viète

Ecuația

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{\begin{matrix} a\neq 0 \\ ax^2+bx+c=0 \end{matrix}} & \Leftrightarrow & & \\
\Leftrightarrow & \boxed{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0} \arrow[rr] & & \boxed{x_1;\quad x_2} & \\
\boxed{-(x_1+x_2)} \arrow[ur] & \boxed{x_1\cdot x_2} \arrow[u] & & \boxed{x_1+x_2=\frac{-b}{a}} \arrow[lll, bend left] & \boxed{x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}} \arrow[lll, bend left]
\end{tikzcd}$$

Soluțiile

Relațiile lui Viète

Teoremă

Dacă numerele x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, $a, b, c\in\mathbb{R}$,

atunci $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$

Demonstrație:

Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2+bx+c=0$, atunci $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ și $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, unde $\Delta=b^2-4ac>0$.

$$\boxed{x_1+x_2}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\boxed{-\frac{b}{a}};$$

$$\boxed{x_1\cdot x_2}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\boxed{\frac{c}{a}},$$

c.c.t.d. ►

Rețineți

Pentru ecuația de gradul II, forma redusă, $x^2 + px + q = 0$, ale cărei soluții sunt x_1 şi x_2, avem $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$

Reciproca teoremei lui Viète

Dacă numerele reale x_1 şi x_2 verifică relațiile $x_1 + x_2 = -p$ şi $x_1 \cdot x_2 = q$, atunci x_1 şi x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 + px + q = 0$.

Demonstrație:

Avem $x^2 + px + q = 0$, $-p = x_1 + x_2$, $q = x_1 \cdot x_2$.

Obținem $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$.

Pentru $x = x_1$ avem: $x_1^2 - (x_1 + x_2) \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1^2 - x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_1 x_2 = 0$ – Adevărat. Deci, x_1 este soluție a ecuației date.

Pentru $x = x_2$ avem: □ – Adevărat, c.c.t.d. ▶

2 Examinați şi completați:

a) Compunem o ecuație de gradul II, forma redusă, cu mulțimea soluțiilor $S = \{-2; 7\}$:

$x_1 = -2$; $x_2 = 7$. $x_1 + x_2 =$ □; $x_1 \cdot x_2 =$ □.

x^2 ○ □ x ○ □ $= 0$.

Răspuns: x^2 ○ □ x ○ □ $= 0$.

b) Utilizând relațiile lui Viète, aflăm soluțiile reale ale ecuației:

$x^2 - 11x + 24 = 0$

$x_1 + x_2 = 11$; $x_1 \cdot x_2 = 24$

$3 + 8 = 11$ $3 \cdot 8 = 24$

$S = \{3; 8\}$.

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3; \\ x_1 \cdot x_2 = -10. \end{cases}$

$S = \{$□; □$\}$.

$x^2 + 5x - 14 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = \square; \\ x_1 \cdot x_2 = \square. \end{cases}$

$S = \{$□; □$\}$.

- Fie ecuația $x^2 + px + q = 0$. Completați tabelul:

x_1	x_2	p	q
2	–3		
–2		5	
	4	–2	
3			18
	1		–7

INTERESANT și UTIL

Relațiile lui Viète pot fi aplicate la calculul oral al soluțiilor nu numai ale ecuației de gradul II, forma redusă, dar şi ale ecuației de gradul II, forma completă, care are soluții.

Rezolvăm ecuația:

a) $$\overset{\otimes}{\boxed{7}\,x^2-2x-5=0}$$

$y^2-2y-35=0$

$y_1=7;\ y_2=-5$

$x_1=\frac{7}{7};\ x_1=1;\ x_2=-\frac{5}{\boxed{7}}.$

Verificați!

Răspuns: $S=\left\{-\frac{5}{7};1\right\}.$

b) $\boxed{2}\,x^2+3x-9=0$

-18

$x_1=\frac{-6}{2};\ x_1=-3;\ x_2=\frac{3}{2}.$

Răspuns: $S=\{\square;\square\}.$

c) $\boxed{4}\,x^2+x-5=0$

-20

$x_1=\frac{\square}{4};\ x_2=\frac{\square}{4};$

$x_1=\square;\ x_2=\square.$

Răspuns: $S=\{\square;\square\}.$

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Aflați prin probe soluțiile ecuației.

a) $x^2-6x+5=0;$ b) $x^2+2x+1=0;$
c) $t^2+8t-9=0;$ d) $z^2-13z-14=0.$

2. Fie ecuația:

a) $x^2-3x-4=0;$ b) $x^2+3x-4=0;$
c) $x^2+6x+5=0;$ d) $x^2-4x+3=0;$

1) Fără a rezolva ecuația, aflați x_1+x_2 și $x_1\cdot x_2$, unde $x_1,\ x_2$ sunt soluțiile ei.

2) Rezolvați în ℝ ecuația și verificați oral dacă ați aflat corect x_1+x_2 și $x_1\cdot x_2$.

3. Aflați oral, aplicând teorema lui Viète, suma şi produsul soluțiilor ecuației.

a) $x^2-5x-10=0;$ b) $x^2+11x-12=0;$
c) $t^2+\sqrt{3}t-30=0;$ d) $z^2-36z+320=0.$

4. ***Lucrați în perechi!*** Aflați soluțiile ecuației și verificați, utilizând reciproca teoremei lui Viète, dacă ele sunt corecte:

a) $x^2+16x+63=0;$ b) $x^2+2x-48=0;$
c) $t^2+t-56=0;$ d) $z^2-9z+20=0.$

☐ **2** ☐

5. Aflați oral suma şi produsul soluțiilor, fără a rezolva ecuația:

a) $x^2-37x+27=0;$ b) $t^2-41t-371=0;$
c) $z^2-310z=0;$ d) $y^2-20=0.$

6. ***Lucrați în perechi!*** Fie ecuația:

a) $2x^2-9x-10=0;$ b) $5x^2+12x+7=0.$

Aflați, fără a rezolva ecuația, suma și produsul soluțiilor ei.

7. Rezolvați în ℝ ecuația și efectuați verificarea, utilizând reciproca teoremei lui Viète:

a) $2x^2+7x-6=0;$ b) $3x^2-4x-4=0;$
c) $7z^2-12z=0;$ d) $-2t^2+32=0.$

8. ***Investigați!*** Determinați semnele soluțiilor ecuației fără a o rezolva:

a) $x^2-18x+17=0;$ b) $3x^2+x-15=0;$
c) $-5t^2+2t+7=0;$ d) $2z^2+125z-8=0.$

9. Fără a rezolva ecuația, determinați dacă ea are soluții și, dacă are, aflați semnele lor:

a) $x^2+6x-1=0;$ b) $3x^2-x+10=0;$
c) $-t^2+8t+24=0;$ d) $-\sqrt{5}z^2+z+1=0.$

10. ***Lucrați în grup!*** Fie:

a) $x_1=-2$ și $x_2=5;$ b) $x_1=0{,}1$ și $x_2=10;$
c) $x_1=-1{,}5$ și $x_2=-4;$ d) $x_1=3$ și $x_2=-0{,}5.$

Utilizând reciproca teoremei lui Viète, scrieți o ecuație de gradul II soluțiile căreia sunt x_1 și x_2.

11. O soluție a ecuației $x^2+px-56=0$ este 8. Aflați soluția a doua și coeficientul p.

12. O soluție a ecuației $10t^2-25t+c=0$ este 5,5. Aflați soluția a doua și coeficientul c.

13. Diferența soluțiilor ecuației $x^2-x+c=0$ este egală cu 7. Aflați coeficientul c.

14. Diferența soluțiilor ecuației $x^2 + 12x + m = 0$ este egală cu 14. Aflați coeficientul m.

15. *Lucrați în perechi!* Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{x^2-4x-5}{x-5}=0$; b) $\frac{x^2+6x-7}{x+1}=0$; c) $\frac{4t^2-1}{2t+1}=0$; d) $\frac{z^2+2z-3}{z-1}=0$.

□ □ **3**

16. Demonstrați că ecuația nu poate avea soluții de același semn:

a) $5t^2+210t-3=0$; b) $\sqrt{3}z^2-115z-8=0$.

17. Utilizând teorema lui Viète, aflați, prin probe, soluțiile ecuației:

a) $t^2-(\sqrt{5}+3)t+3\sqrt{5}=0$; b) $t^2-(n^2-3)t-3n^2=0$.

18. Pentru care valori reale ale lui a ecuația $\frac{x^2-5x-6}{x-a}=0$ are o unică soluție?

19. Pentru care valori reale ale lui a ecuația $\frac{t^2-t-6}{t-a}=0$ are o unică soluție?

§7. Descompunerea în factori a expresiilor de forma $ax^2+bx+c,\ a\neq 0$

1 Scrieți expresia $3(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$ sub forma $ax^2+bx+c,\ a\neq 0$.

Rezolvare:

$$3(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)=3x^2-x-6x+2=\boxed{3x^2-7x+2}.$$

- Descompuneți în factori expresia $3x^2-7x+2$.

Rezolvare:

Rezolvăm ecuația $3x^2-7x+2=0$. Calculăm $\Delta=49-24=25$.

Atunci $x_1=\frac{7+5}{6}$; $x_2=\frac{7-5}{6}$; $x_1=2$; $x_2=\frac{1}{3}$.

Obținem $3x^2-7x+2=3(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

Rețineți

> Dacă $a\neq 0$ și $\Delta\geq 0$, atunci $\boldsymbol{ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)(x-x_2)}$, unde $a\neq 0$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, iar x_1 și x_2 sunt soluțiile reale ale ecuației $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$.

În ce caz expresia de forma $ax^2+bx+c,\ a\neq 0$, nu poate fi descompusă în factori?

2 Examinați și completați.

Descompunem în factori expresia:

a) $-2x^2-3x+2$;

Rezolvăm ecuația

$-2x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow 2x^2+3x-2=0.$

$\Delta=9+16=25$. Deci, $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=-2$.

Atunci $\boxed{-2}x^2-3x+2=\underset{a}{\boxed{-2}}\underset{(x-x_1)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)}\underset{(x-x_2)}{(x-(-2))}=$

$=(-2x+1)(x+2).$

b) $7x^2+9x+2$.

Rezolvăm ecuația $7x^2+9x+2=0$.

$x_1=$ ■; $x_2=$ ■.

$\boxed{7}x^2+9x+2=\underset{a}{\boxed{}}\underset{(x-x_1)}{(x\ ●\ ■)}\underset{(x-x_2)}{(x\ ●\ ■)}=$

$=($■ ● ■$)($■ ● ■$).$

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. *Lucrați în perechi!* Completați:

a) $x^2-4x+4=(x-\square)^2$; b) $z^2-3z-4=(z-\square)(z+\square)$;

c) $9x^2+6x+1=(3x+\square)^2$; d) $t^2+6t+5=(t+\square)(t+\square)$.

2. Efectuați:

a) $(x+1)(x+2)$; b) $6(x+3)(x-4)$; c) $(2t-1)(t-5)$; d) $(z-0{,}5)(z+2)$.

3. Descompuneți în factori:

a) $3x^2-x$; b) $20x^2-5$; c) $x^2+3x-10$;

d) $2x^2-x-15$; e) $-8t^2+4t+12$; f) $3x^2-x-4$.

☐ **2** ☐

4. *Lucrați în grup!* Descompuneți în factori:

a) $3x^2+x-14$; b) $-x^2+3x+4$;

c) $18x^2+6x-84$; d) $4x^2-x-18$;

e) $-t^2+4+5$; f) $3z^2+4z-20$.

5. Aflați cea mai mică valoare a expresiei:

a) $x^2-8x+11$; b) x^2-6x-3.

6. Aflați cea mai mare valoare a expresiei:

a) $-3(x+1)^2+5$; b) $-x^2+6x$.

7. *Lucrați în perechi!* Scrieți patru expresii de forma ax^2+bx+c, $a\neq 0$, pentru care:

a) $x_1=-2$ şi $x_2=0{,}5$; b) $x_1=\sqrt{3}$ şi $x_2=1-\sqrt{3}$;

c) $x_1=3$ şi $x_2=1$; d) $x_1=-1$ şi $x_2=-4$.

☐ ☐ **3**

8. Pentru care valori reale ale lui c expresia x^2+4x+c poate fi descompusă în factori?

9. Fie expresiile $3x^2-2x-1$ şi x^2-4x-c. Aflați pentru care valori reale ale lui c aceste expresii au acelaşi factor liniar.

10. Demonstrați că pentru orice valoare a necunoscutei valoarea expresiei $t^2+4t+10$ este pozitivă.

§8. Rezolvarea unor probleme cu ajutorul ecuațiilor de gradul II

1 Produsul a două numere naturale este egal cu 150. Aflați numerele, dacă se ştie că unul dintre ele este cu 5 mai mare decât celălalt.

Rezolvare:

Fie x – numărul mai mare, atunci $x-5$ este al doilea număr. Conform condiției problemei, avem $x(x-5)=150$.

Obținem şi rezolvăm ecuația de gradul II cu o necunoscută: $x^2-5x-150=0$.

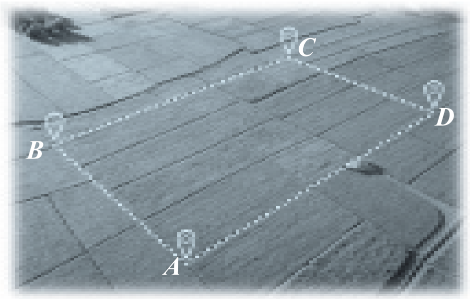
Avem $\Delta=625$.

Deci, $x_1=\dfrac{5+25}{2}=15$ şi $x_2=\dfrac{5-25}{2}=-10$.

Constatăm că $x_2=-10$ nu este număr natural, deci $x_1=15$ este numărul mai mare. Atunci numărul mai mic va fi egal cu $15-5=10$.

Răspuns: 10 şi 15.

2 Un lot de teren are forma unui dreptunghi, una dintre laturile căruia este cu 10 m mai lungă decât cealaltă. Fermierul a decis să îngrădească acest lot. Aflați ce lungime va avea gardul, dacă aria lotului e de 1200 m².



Rezolvare:

Fie $AB = x$ m, atunci $BC = (x+10)$ m.

Ştiind că aria lotului e de 1200 m² şi că aria dreptunghiului se calculează după formula $\mathcal{A}_{\square} = a \cdot b$ obținem ecuația $x(x+10) = 1200$ sau $x^2 + 10x - 1200 = 0$.

Rezolvând ecuația de gradul II, obținem: $\Delta = 10^2 + 4 \cdot 1200 = 4900$; $x_1 = \frac{-10+70}{2} = 30$ şi $x_2 = \frac{-10-70}{2} = -40$.

Valoarea negativă $x_2 = -40$ nu satisface condițiile problemei.

Deci, AB = 30 m, atunci $BC = 30 + 10 = 40$ (m). Aşa cum perimetrul dreptunghiului se calculează după formula $\mathcal{P}_{\square} = 2(a+b)$, obținem că gardul va avea lungimea de $2(30+40) = 2 \cdot 70 = 140$ (m).

Răspuns: 140 m.

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Produsul a două numere întregi este egal cu 96. Aflați numerele, dacă se ştie că unul dintre ele este cu 4 mai mic decât celălalt.
2. În sala de cinema numărul de scaune în fiecare rând este cu 4 mai mare decât numărul de rânduri. Determinați câte rânduri sunt în sală, dacă se ştie că în total sunt 780 de scaune.
3. ***Lucrați în perechi!*** Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația: $(2x-1)^2 - 2x^2 = 3x + 2 + x(3x-5)$.
4. Aflați $A \cap B$, unde $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x^2 + x - 4 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \leq 4\}$.
5. Suma pătratelor a două numere întregi este egală cu 10. Aflați numerele, dacă se ştie că unul dintre ele este cu 2 mai mare decât celălalt.
6. Un grădinar are de amenajat un rond de flori în formă de dreptunghi, o latură a căruia este cu 5 m mai lungă decât cealălaltă latură.
   a) Aflați de câți metri de plasă e nevoie pentru a îngrădi rondul, dacă aria lui este egală cu 6 m².
   b) Cât va plăti grădinarul pentru plasă, dacă 1 m de plasă costă 65 lei?
   c) De câte kilograme de semințe de flori e nevoie, dacă pentru 1 m² se folosesc 80 g de semințe?

☐ **2** ☐

7. Aflați aria triunghiului dreptunghic, dacă se ştie că lungimea ipotenuzei este de 25 cm, iar raportul dintre lungimile catetelor este de 3 : 4.
8. Fie x_1 şi x_2 soluțiile ecuației $5x^2 + x - 6 = 0$. Calculați, fără a rezolva ecuația:
   a) $(x_1 + x_2)^2$; b) $(x_1 \cdot x_2)^3$; c) $x_1^2 + x_2^2$; d) $(x_1 - x_2)^2$.
9. Aflați valoarea lui *c* pentru care diferența soluțiilor ecuației $x^2 - 10x + c = 0$ este egală cu 8.
10. Lungimile catetelor triunghiului dreptunghic se raportă ca 8:15, iar lungimea ipotenuzei este egală cu 6,8 cm.
    a) Aflați perimetrul triunghiului dreptunghic. b) Calculați aria triunghiului dreptunghic.

11. *Lucrați în perechi!* O parcelă are forma unui triunghi dreptunghic, lungimea ipotenuzei căruia se raportă la lungimea uneia dintre catete ca 13:12, iar cealaltă catetă are lungimea de 15 m.

a) Aflați lungimea gardului cu care este îngrădită parcela.

b) De câte kilograme de cartofi e nevoie pentru a însămânța parcela, dacă pentru 1 m² se folosesc 2,5 kg?

c) Cât a plătit fermierul pentru a însămânța cu cartofi această parcelă, dacă 1 kg de cartofi costă 6,3 lei?

12. Suma pătratelor a două numere naturale consecutive este egală cu 250. Aflați numerele, dacă se ştie că unul dintre ele este cu 10 mai mic decât celălalt.

13. *Lucrați în grup!* Terenul de sport de forma unui dreptunghi are aria egală cu 1800 m².

a) Aflați dimensiunile terenului, dacă una dintre laturi este cu 14 m mai scurtă decât cealaltă.

b) Calculați perimetrul terenului de sport.

14. Pentru a construi un depozit sub formă dreptunghiulară s-au repartizat 48 m² de teren. Se ştie că lungimea depozitului trebuie să fie cu 8 m mai mare decât lățimea lui. Aflați lungimea şi lățimea depozitului.

15. Pătratul sumei a două numere întregi consecutive este cu 112 mai mare decât suma pătratelor acestora. Aflați numerele.

☐ ☐ **3**

16. La o competiție de şah s-au jucat 55 de partide, astfel încât fiecare participant a jucat câte o partidă cu fiecare dintre ceilalți participanți. Câți şahişti au participat la competiție?

17. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $3x^2-|x|-4=0$; b) $2x^2-5|x|+2=0$; c) $3x^2+|x|-70=0$; d) $8x^2+|x|-75=0$.

18. *Investigați!* Demonstrați că pentru orice valori reale ale coeficientului b ecuația $6x^2+bx-30=0$ are o soluție pozitivă şi una negativă.

Exerciții și probleme recapitulative

1 ☐ ☐

1. *Investigați!* Care dintre numerele –7; –5; 5; 7 sunt soluții ale ecuației $x^2+2x-35=0$?

2. *Investigați!* Arătați că numerele $1-\sqrt{2}$ și $1+\sqrt{2}$ sunt soluții ale ecuației $x^2-2x-1=0$.

3. Indicați coeficienții a, b şi termenul liber c ai ecuației:

a) $3x^2-4x-4=0$; b) $x^2-x-2=0$;

c) $7x^2-1=0$; d) $5x^2+3x=0$.

4. *Lucrați în perechi!* Scrieți ecuația de gradul II cu coeficienții:

a) $a=3$; $b=6$; $c=-2$; b) $a=2$; $b=-1$; $c=5$;

c) $a=1$; $b=2$; $c=-3$; d) $a=2$; $b=5$; $c=0$.

Determinați care dintre ecuațiile obținute sunt ecuații de gradul II, forma incompletă.

5. Determinați tipul ecuației de gradul II cu o necunoscută:

a) $2x^2-1=0$; b) $-\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}+5=0$;

c) $x^2-8{,}5x=0$; d) $\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{2}x-8=0$.

6. Calculați discriminantul ecuației de gradul II cu o necunoscută:

a) $3x^2-2x-5=0$; b) $x^2+16x+63=0$;

c) $2x^2+7x+6=0$; d) $x^2-x-12=0$.

7. Rezolvați ecuația în mulțimea $\mathbb{Z}$:

a) $x^2-x-12=0$; b) $t^2-7t-1=0$;

c) $3z^2-\sqrt{5}z-4=0$; d) $2x^2-3x-4=0$.

8. *Lucrați în grup!* Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $y^2-49=0$; b) $t^2-100=0$;

c) $8z^2+3z=0$; d) $5{,}2x^2+3=0$.

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația știind că coeficientul al doilea este de forma $b = 2k$.

a) $x^2 - 10x + 9 = 0$; b) $3x^2 + 6x - 9 = 0$; c) $2x^2 - 16x + 14 = 0$; d) $-5x^2 - 12x - 4 = 0$.

10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația aplicând reciproca teoremei lui Viète:

a) $t^2 + 6x - 7 = 0$; b) $z^2 - 7x + 10 = 0$; c) $x^2 + 3x - 4 = 0$; d) $x^2 - 5x + 4 = 0$.

11. ***Lucrați în perechi!*** Indicați numărul plicului în care poate fi pusă fiecare ecuație:

$3x^2 + 30 = 0$ $\quad$ $x^2 - 6x - 16 = 0$ $\quad$ $x^2 - 6x = 0$ $\quad$ $x^2 - 10x + 25 = 0$

① Una dintre soluții este 0.

② Are o unică soluție.

③ Nu are soluții în $\mathbb{R}$.

④ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 \cdot x_2 = 16. \end{cases}$

12. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $6x^2 + 0{,}5x = 0$; b) $3x^2 + 13x - 10 = 0$; c) $5x(5x + 2) + 3 = 2$.

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $2x^2 + x - 6 = 0$; b) $3x^2 + 4x - 4 = 0$; c) $7 - 6x - 9x^2 = 8$.

14. Compuneți o ecuație de gradul II, forma redusă, care are soluțiile:

a) $x_1 = -5$; $x_2 = 2$; b) $x_1 = -7$; $x_2 = -3$.

15. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile de gradul II, forma incompletă:

a) $3x^2 - 12 = 0$; b) $2x^2 - 5x = 0$;
c) $5x^2 + 8 = 0$; d) $10x^2 = 0$.

16. Calculați discriminantul ecuației; determinați dacă ecuația are soluții în $\mathbb{R}$ și aflați soluțiile în cazul în care ele există:

a) $x^2 - 7x - 18 = 0$; b) $3x^2 - 5x + 2 = 0$;
c) $3x^2 - 11x + 10 = 0$; d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

17. Utilizând relațiile lui Viète, aflați suma și produsul soluțiilor ecuației:

a) $x^2 - 14x + 13 = 0$; b) $x^2 + 12x + 35 = 0$;
c) $7x^2 - 2x - 14 = 0$; d) $x^2 - 16x - 36 = 0$.

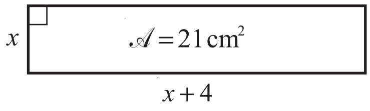
☐ **2** ☐

18. Aflați trei numere naturale consecutive suma pătratelor cărora este egală cu 590.

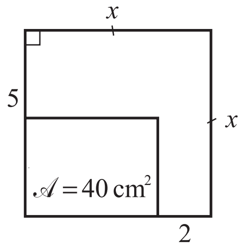
19. Determinați numărul, știind că dacă la pătratul acestuia se va aduna 9, atunci vom obține un număr de zece ori mai mare decât numărul dat.

20. ***Investigați!*** Utilizând datele din desen, aflați x:

a)



b)



21. ***Lucrați în perechi!*** Completați tabelul:

a)

Ecuația	$a+b+c$	Soluțiile
$x^2 + x - 2 = 0$		
$x^2 - 3x + 2 = 0$		
$2x^2 - 5x + 3 = 0$		
$5x^2 - 7x + 2 = 0$		

b)

Ecuația	$a-b+c$	Soluțiile
$x^2 + 5x + 4 = 0$		
$3x^2 - 7x - 10 = 0$		
$-9x^2 - 4x + 5 = 0$		
$13x^2 + 6x - 7 = 0$		

22. Trageți concluzia: Dacă $a + b + c =$ ☐, atunci $x_1 =$ ☐, $x_2 =$ ☐.

Dacă $a - b + c =$ ☐, atunci $x_1 =$ ☐, $x_2 =$ ☐.

23. Aflați valorile reale ale lui x, astfel încât să fie adevărată egalitatea (rotunjiți rezultatul până la zecimi):

a) $x^2-6x-1=0$;   b) $x^2+5x=x-1$;

c) $x^2-x=x+2$.

24. ***Lucrați în grup!*** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $3(x-2)^2=2x+4$;   b) $(x+2)^2=x(3x+2)$;

c) $(3x+4)^2-(x-5)^2=-9$;   d) $(3x-2)(x+6)=-9$;

e) $\frac{(4x+1)^2}{5}=3x+\frac{7x-1}{3}$;   f) $(x+2)^2=8(3x+8)$.

25. ***Lucrați în perechi!*** Scrieți o ecuație de gradul II, forma redusă, cu mulțimea soluțiilor:

a) $S=\{-3;\ 4\}$;   b) $S=\{2;\ 7\}$;

c) $S=\{2-\sqrt{7};\ 2+\sqrt{7}\}$;   d) $S=\varnothing$.

26. Utilizând relațiile lui Viète, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $x^2-5x+6=0$;   b) $x^2+11x+18=0$;

c) $x^2+5x-14=0$;   d) $x^2-4x-21=0$.

27. ***Investigați!*** Descompuneți în factori, dacă e posibil, expresia:

a) $x^2-10x+21$;   b) $6x^2-11x+3$;

c) $3x^2+7x-6$;   d) $-2x^2+3x+2$.

28. Într-un dreptunghi o latură este cu 5 cm mai scurtă decât cealaltă latură. Aflați perimetrul dreptunghiului, dacă se știe că aria lui este egală cu 150 cm².

29. Elevii clasei a VIII-a au decis să se fotografieze câte doi, astfel încât fiecare elev se fotografiază cu fiecare coleg al său. Determinați câți elevi învață în clasa a VIII-a, dacă în total s-au obținut 420 de fotografii.

30. O piatră care a fost aruncată cu viteza inițială de 20 m/s se mișcă conform legii $s=vt-5t^2$. Peste câte secunde piatra va ajunge la înălțimea de 15 m?

31. ***Problemă din Antichitate***

Aflați lungimea laturii unui pătrat, știind că, dacă din valoarea ariei lui scădem valoarea lungimii căutate, obținem 870.

32. Scrieți o ecuație de gradul II cu mulțimea soluțiilor:

a) $S=\{3-\sqrt{2};\ 3+\sqrt{2}\}$;   b) $S=\{1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3}\}$.

33. ***Lucrați în perechi!*** x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $2x^2-7x-3=0$. Compuneți o ecuație de gradul II ale cărei soluții sunt numerele:

a) x_1-2 și x_2-2;   b) $2x_1+3$ și $2x_2+3$;   c) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

34. Aflați valoarea expresiei:

a) $\frac{49-x^2}{x^2-6x-7}$ pentru $x=999$;

b) $\frac{x^2-11x+10}{20+8x-x^2}$ pentru $x=101$.

35. Pe o platformă s-au încărcat bârne de stejar și de brad, în total 300 de bârne. Se știe că bârnele de stejar cântăresc cu 1 t mai puțin decât cele de brad. Aflați câte bârne de stejar și câte de brad au fost încărcate pe platformă, dacă o bârnă de stejar cântărește 46 kg, iar una de brad – 28 kg.

36. În două butoaie sunt 140 *l* de apă. După ce din primul butoi s-au scos 26 *l* de apă, iar din al doilea – 60 *l* de apă, în primul butoi a rămas de 2 ori mai multă apă decât în cel de-al doilea. Câți litri de apă au fost în fiecare butoi la început?

☐ ☐ **3**

37. Analizați modelul și rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $x^4+2x^2-3=0$;

b) $5x^4-2x^2-3=0$;

c) $6x^4-5x^2+1=0$;

d) $3x^4-10x^2+3=0$.

Model:

$4x^4+7x^2-2=0$. Fie $x^2=t,\ t\geq 0$; $4t^2+7t-2=0$; $\Delta=81$;

$t_1=\frac{1}{4}$; $t_2=-2$ – nu satisface condiția $t\geq 0$.

$x^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ sau $x=-\frac{1}{2}$.

Răspuns: $S=\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right\}$.

38*. Aflați parametrul real m şi soluția a doua a ecuației, dacă:

a) $x^2 + mx - 15 = 0$ şi $x_1 = -5$;

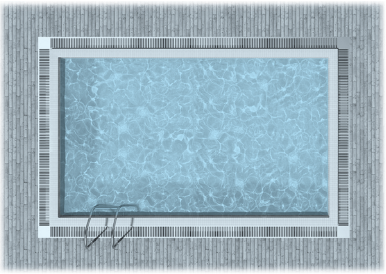
b) $2x^2 + 3x + m = 0$ şi $x_1 = 3$.

39*. Aflați valorile parametrului real m, astfel încât ecuația să aibă o unică soluție:

a) $x^2 - mx + 9 = 0$; b) $x^2 + 3mx + m = 0$;

c) $2x^2 - 2x + m = 0$; d) $9x^2 - 2x + m = 6 - mx$.

40. Fundul unui havuz are forma unui dreptunghi cu laturile de 6 m şi 9 m. În jurul havuzului este o cărare pavată, de aceeaşi lățime, aria cărării este egală cu aria fundului havuzului. Aflați lățimea cărării.



41. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{x^3}{|x|} + x + 2 = 0$; b) $x^2 - \frac{x^2}{|x|} - 6 = 0$;

c) $x^2 - 10 = 3|x|$; d) $x^2 + |x| + x = 63$.

42. x_1 şi x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 13x + 14 = 0$. Aflați, fără a rezolva ecuația, valoarea expresiei:

a) $(x_1 + x_2)^2$; b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;

c) $x_1{}^2 + x_2{}^2$; d) $(x_1 - x_2)^2$.

43*. Pentru care $a \in \mathbb{R}$:

a) $2x^2 - 5x + a = (2x + 3) \cdot E(x)$;

b) $-4x^2 + ax + 1 = (x - 1) \cdot E(x)$,

unde $E(x)$ este o expresie de x?

44. La o competiție participă câteva echipe. Fiecare echipă trebuie să joace câte o partidă cu fiecare dintre celelalte echipe. Câte echipe participă la competiție, dacă în total trebuie să se joace 45 de partide?

45*. ***Investigați!*** Aflați valorile parametrului real a pentru care ecuația:

a) $2x^2 - 5x + a = 0$ nu are soluții;

b) $ax^2 - (a + 1)x + 2a - 1 = 0$ are o soluție unică.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta 1

1. Fie ecuația $2x^2 + x - \square = 0$.

a) Completați astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației să fie $S = \varnothing$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2x^2 + x - 1 = 0$.

c) Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}.$$

2. Descompuneți în factori expresia:

$$2x^2 - x - 1.$$

3. Un fermier a însămânțat o fâşie cu lățimea de 3 m dintr-o parcelă de formă pătrată. Porțiunea rămasă de forma dreptunghiulară are aria egală cu 70 m². Aflați lungimea inițială a laturii parcelei.

4. Scrieți o ecuație de gradul II cu o necunoscută mulțimea soluțiilor căreia este $S = \{3 - \sqrt{2};\ 3 + \sqrt{2}\}$.

Varianta 2

1. Fie ecuația $3x^2 - x + \square = 0$.

a) Completați astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației să fie $S = \varnothing$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3x^2 - x - 2 = 0$.

c) Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x) = \frac{x^2 - 1}{3x^2 - x - 2}.$$

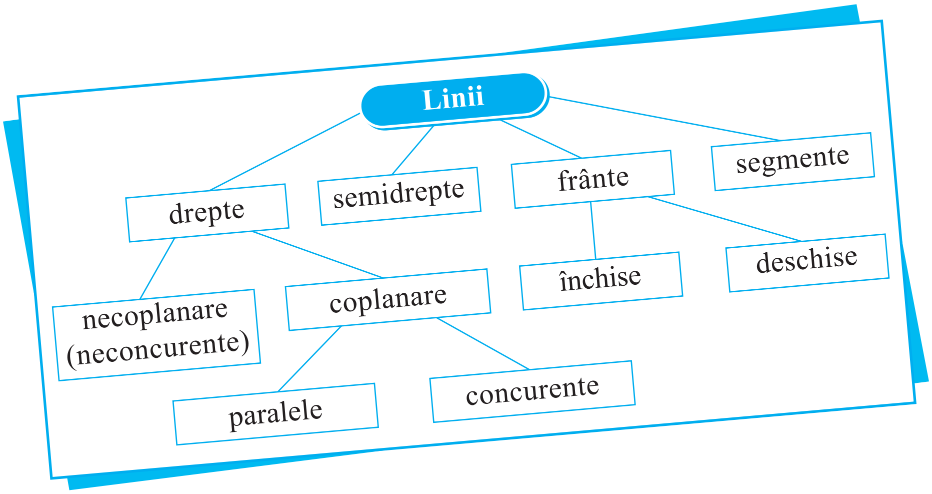
2. Descompuneți în factori expresia:

$$3x^2 + x - 2.$$

3. Lica a tăiat o fâşie cu lățimea de 5 cm dintr-o foaie de carton de formă pătrată. Porțiunea rămasă de forma dreptunghiulară are aria egală cu 50 cm². Aflați lungimea inițială a foii de carton.

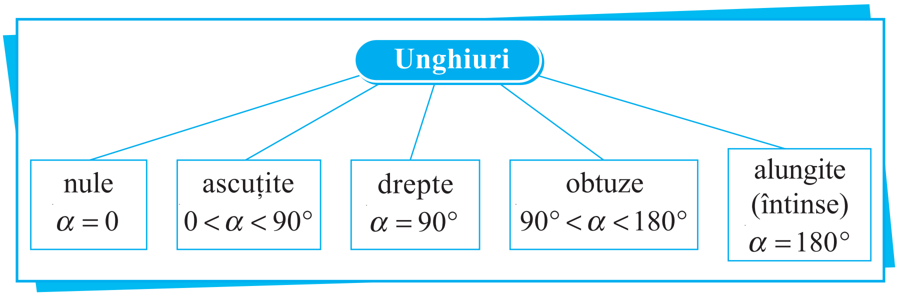
4. Scrieți o ecuație de gradul II cu o necunoscută mulțimea soluțiilor căreia este $S = \{1 - \sqrt{3};\ 1 + \sqrt{3}\}$.

GEOMETRIE



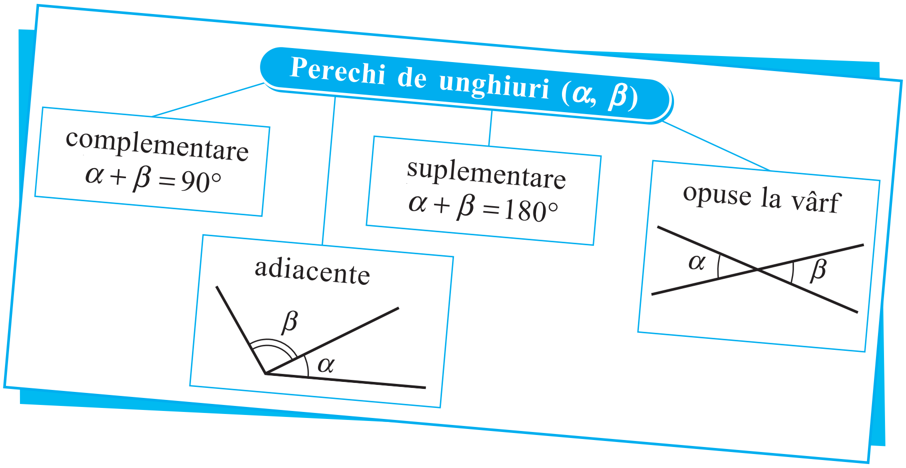
Linii

- drepte
  - necoplanare (neconcurente)
  - coplanare
    - paralele
    - concurente
- semidrepte
- frânte
  - închise
  - deschise
- segmente



Unghiuri

- nule $\alpha = 0$
- ascuțite $0 < \alpha < 90°$
- drepte $\alpha = 90°$
- obtuze $90° < \alpha < 180°$
- alungite (întinse) $\alpha = 180°$



Perechi de unghiuri (α, β)

- complementare $\alpha + \beta = 90°$
- adiacente
- suplementare $\alpha + \beta = 180°$
- opuse la vârf

Capitolul 1 Recapitulare și completări

> *Intrarea în țara cunoașterii se face pe podiumul matematicii.*
> Ștefan Bârsănescu

§1. Linii, unghiuri, triunghiuri, cercuri

1 Examinați schemele de la pagina 107 și explicați care:

a) drepte sunt paralele; concurente; coplanare;

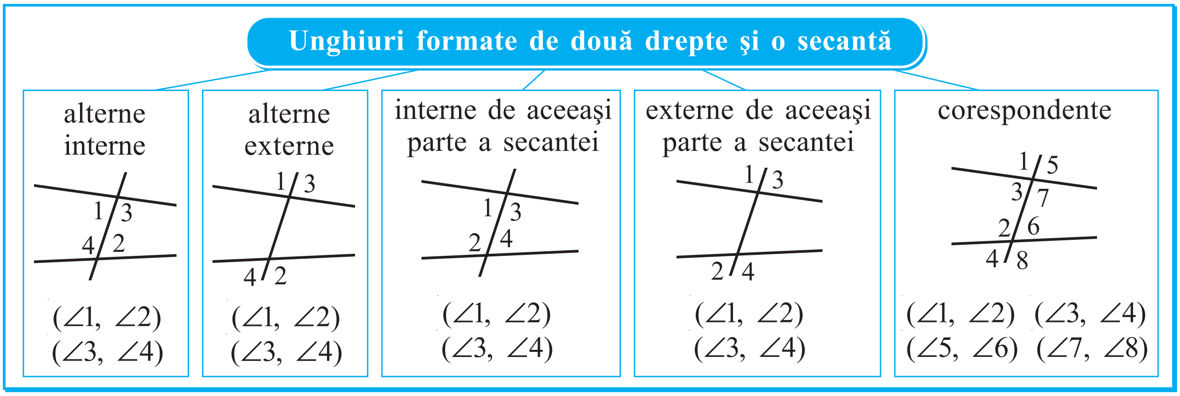
b) unghiuri sunt ascuțite; obtuze; alungite; opuse la vârf; complementare; suplementare; adiacente.

Ne amintim

- Punctele care aparțin unei drepte se numesc **puncte coliniare**.
- Două **semidrepte opuse** au originea comună și formează o dreaptă.
- Două segmente cu lungimi egale se numesc **segmente congruente**.
- Două figuri geometrice se numesc **coplanare** dacă ele sunt incluse în același plan.
- Orice dreaptă din plan separă planul în două mulțimi de puncte, numite **semiplane**.
- Două **drepte** se numesc **paralele** dacă ele sunt situate în același plan și nu au puncte comune sau care coincid.
  - ✓ Prin orice punct exterior unei drepte se poate construi o unică dreaptă paralelă cu dreapta dată.
  - ✓ Dacă două drepte sunt paralele cu a treia dreaptă, atunci ele sunt paralele.
- Două drepte concurente care formează un unghi drept se numesc **drepte perpendiculare**.
  - ✓ Prin orice punct care aparține sau nu unei drepte se poate construi o unică dreaptă perpendiculară pe dreapta dată.

• Amintiți-vă ce este mediatoarea unui segment, apoi construiți cu ajutorul riglei și al compasului un segment de 8 cm și mediatoarea lui.

2 Examinați schema. Formulați propoziții adevărate despre unghiurile formate de două drepte și o secantă. *Exemplu:* Dacă unghiurile alterne interne, formate de două drepte a și b și o secantă, sunt congruente, atunci $a \parallel b$.



Unghiuri formate de două drepte și o secantă

alterne interne: $(\angle 1, \angle 2)$ $(\angle 3, \angle 4)$

alterne externe: $(\angle 1, \angle 2)$ $(\angle 3, \angle 4)$

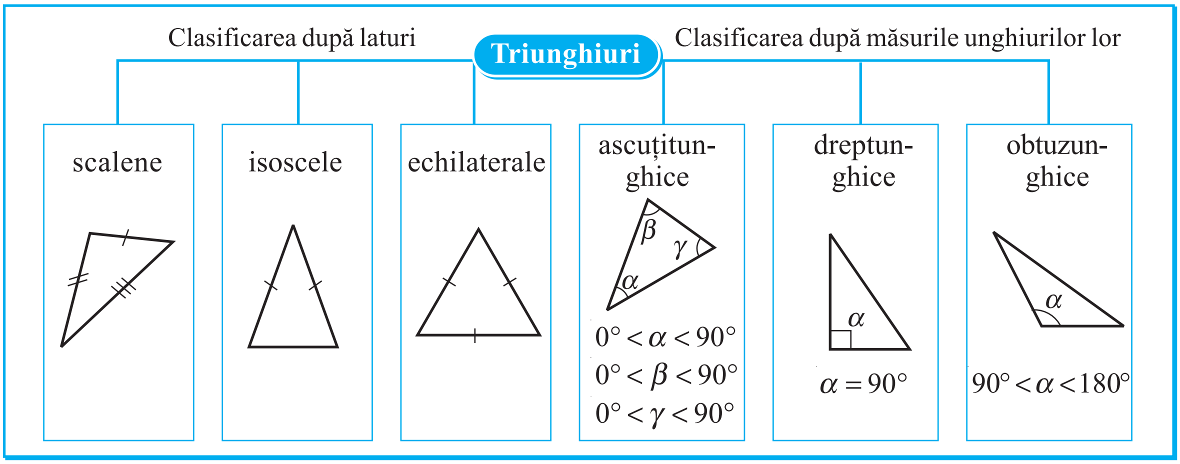
interne de aceeași parte a secantei: $(\angle 1, \angle 2)$ $(\angle 3, \angle 4)$

externe de aceeași parte a secantei: $(\angle 1, \angle 2)$ $(\angle 3, \angle 4)$

corespondente: $(\angle 1, \angle 2)$ $(\angle 3, \angle 4)$ $(\angle 5, \angle 6)$ $(\angle 7, \angle 8)$

3 Examinați schema şi explicați care triunghiuri sunt:

a) isoscele; echilaterale; scalene; b) dreptunghice; obtuzunghice.



Ne amintim

Linii importante ale triunghiurilor

- **Înălțime** a triunghiului se numeşte segmentul determinat de un vârf al triunghiului şi de punctul în care perpendiculara dusă din acest vârf intersectează dreapta suport a laturii opuse.
- **Mediană** a triunghiului se numeşte segmentul determinat de un vârf al triunghiului şi de mijlocul laturii opuse.
- **Bisectoare** a triunghiului se numeşte segmentul determinat de un vârf al triunghiului şi de punctul în care bisectoarea unghiului cu acest vârf al triunghiului intersectează latura opusă.
- Segmentul ce uneşte mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numeşte **linie mijlocie** a triunghiului. Ea este paralelă cu o latură a triunghiului şi are lungimea de două ori mai mică decât lungimea acestei laturi.

• Formulați propoziții adevărate despre liniile importante ale triunghiului. *Exemplu:* Mediana dusă la baza unui triunghi isoscel este şi o bisectoare a acestui triunghi.

• Calculați lungimile liniilor mijlocii ale triunghiului cu laturile de 10 cm, 12 cm, 15 cm.

Ne amintim

- Două **triunghiuri congruente** au laturile şi unghiurile respectiv congruente.
- *Criteriile de congruență ale triunghiurilor*
  - ✓ **Criteriul LUL.** Dacă două laturi şi unghiul cuprins între ele ale unui triunghi sunt respectiv congruente cu două laturi şi unghiul cuprins între ele ale altui triunghi, atunci triunghiurile sunt congruente.
  - ✓ **Criteriul ULU**. Dacă o latură şi unghiurile alăturate ei ale unui triunghi sunt respectiv congruente cu o latură şi unghiurile alăturate ei ale altui triunghi, atunci triunghiurile sunt congruente.
  - ✓ **Criteriul LLL**. Dacă laturile unui triunghi sunt respectiv congruente cu laturile altui triunghi, atunci triunghiurile sunt congruente.

• Construiți cu rigla, compasul, raportorul şi creionul un triunghi:

a) cu o latură de 7 cm şi unghiurile alăturate ei de 30° şi 50°;

b) cu laturile de 4,5 cm şi 5,5 cm şi unghiul dintre ele de 40°.

• Construiți cu rigla, compasul şi creionul un triunghi cu laturile de 4 cm, 7 cm şi 8 cm.

4 Pentru fiecare noțiune din prima coloană găsiți descrierea (sau definiția) acesteia în coloana a doua.

Model: ① → ④

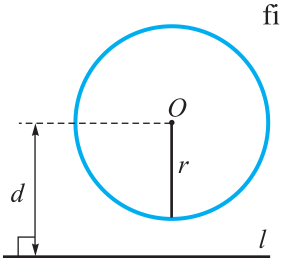
① Unghi drept
② Puncte coliniare
③ Unghi nul
④ Drepte paralele
⑤ Unghiuri complementare
⑥ Ipoteză
⑦ Unghi obtuz
⑧ Figuri congruente
⑨ Punct
⑩ Semidrepte opuse
⑪ Adevăr
⑫ Axiomă
⑬ Coplanare
⑭ Contraexemplu
⑮ Demonstrație
⑯ Drepte perpendiculare
⑰ Unghi alungit
⑱ Drepte concurente
⑲ Lungime
⑳ Linie mijlocie a triunghiului
㉑ Propoziție matematică
㉒ Semidreaptă
㉓ Fals
㉔ Teoremă
㉕ Unghiuri adiacente
㉖ Unghiuri suplementare
㉗ Unghi
㉘ Dreaptă
㉙ Segment
㉚ Bisectoarea unghiului
㉛ Reciproca teoremei
㉜ Unghi ascuțit
㉝ Concluzie

① Argumentarea adevărului unei teoreme
② Unghi cu măsura de 180°
③ Valoarea de adevăr a unei propoziții false
④ Unghi cu măsura de 90°
⑤ Propoziție matematică adevărată al cărei adevăr trebuie demonstrat
⑥ Drepte concurente care formează un unghi drept
⑦ Figură geometrică formată din două semidrepte cu originea comună
⑧ Reprezintă condițiile unei teoreme
⑨ Semidreaptă cu originea în vârful unghiului, inclusă în interiorul lui și care formează cu laturile unghiului două unghiuri congruente
⑩ Porțiune a dreptei mărginită la ambele capete
⑪ Două unghiuri cu suma măsurilor de 90°
⑫ Propoziție matematică adevărată admisă fără demonstrație
⑬ Enunț despre care se poate stabili cu certitudine că este adevărat sau fals și care nu poate fi și adevărat, și fals
⑭ Exemplu care contrazice o propoziție, demonstrând astfel că ea este falsă
⑮ Trei sau mai multe puncte ale unei drepte
⑯ Figuri incluse în același plan
⑰ Unghi cu măsura de 0°
⑱ Porțiune a unei drepte nemărginite la un capăt
⑲ Drepte coplanare care nu au niciun punct comun
⑳ Unghi cu măsura cuprinsă între 90° și 180°
㉑ Două drepte diferite care se intersectează
㉒ Două unghiuri cu suma măsurilor de 180°
㉓ Valoarea de adevăr a unei teoreme
㉔ Unghi cu măsura cuprinsă între 0° și 90°
㉕ Prin două puncte poate fi construită doar una
㉖ Parte a teoremei care este ipoteză pentru reciproca acestei teoreme
㉗ Figuri care prin suprapunere coincid
㉘ Propoziția obținută prin schimbarea locurilor ipotezei și concluziei unei teoreme
㉙ Două semidrepte cu originea comună care formează o dreaptă
㉚ Două unghiuri coplanare cu vârful comun și o latură comună, situată între celelalte două laturi ale unghiurilor
㉛ Măsura segmentului
㉜ Cea mai simplă figură geometrică
㉝ Segmentul ce unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi

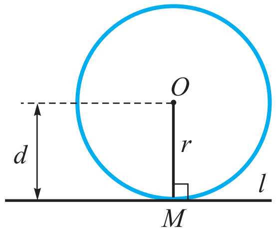
Ne amintim

- **Cercul** este figura geometrică formată din toate punctele egal depărtate de un punct dat, numit **centrul cercului**.
- Segmentul care uneşte centrul cercului cu un punct al cercului se numeşte **rază**.
- Segmentul care uneşte două puncte ale cercului se numeşte **coardă**.
- Coarda care conţine centrul cercului se numeşte **diametru**.
- Cercul împreună cu interiorul său se numeşte **disc**.

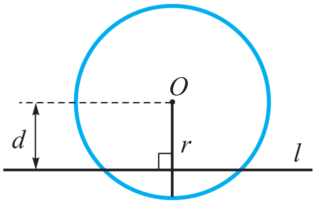
3 Examinaţi desenele (O este centrul cercului). Observaţi cum se numeşte dreapta l în fiecare caz.



dreaptă **exterioară** cercului



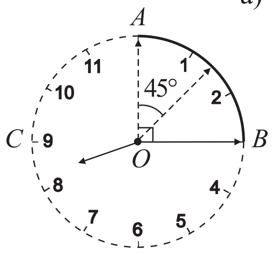
dreaptă **tangentă** la cerc;
M – punct de tangenţă



dreaptă **secantă** la cerc

• Câte puncte comune au un cerc şi o dreaptă dacă distanţa dintre centrul cercului şi dreaptă este egală cu $3\sqrt{8}$ cm, iar raza cercului este egală cu:

a) $6\sqrt{2}$ cm; b) $4\sqrt{5}$ cm; c) $2\sqrt{10}$ cm; d) $5\sqrt{3}$ cm?



4 În cât timp minutarul unui ceas descrie:

a) un unghi de 45°;

b) o porţiune de cerc de lungime egală cu $\frac{1}{4}$ din lungimea cercului ceasului;

c) un semicerc?

Răspuns: a) 7 min. şi 30 s; b) 15 min.; c) 30 min.

Observaţie

În geometrie porţiunile de cerc au denumiri şi notaţii speciale.

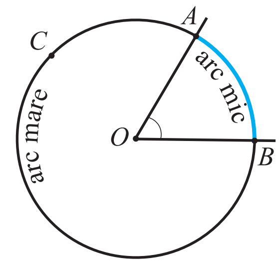
Definiţii

- Un unghi cu vârful în centrul unui cerc se numeşte **unghi la centru**.
- Partea cercului situată în interiorul unghiului la centru se numeşte **arc mic** al cercului. *Notăm*: $\smile AB$, unde A şi B sunt punctele de intersecţie a unghiului la centru cu cercul.
- Partea cercului situată în exteriorul unghiului la centru se numeşte **arc mare** al cercului. *Notăm*: $\smile ACB$, unde C aparţine cercului, dar nu aparţine arcului mic.
- Punctele A şi B se numesc **capetele arcelor**. Arcele $\smile AB$ şi $\smile ACB$ se numesc **arce complementare**.
- **Măsura unui arc mic** este măsura unghiului la centru corespunzător arcului.

$$m(\smile AB) = m(\angle AOB)$$

- **Măsura unui arc mare** este egală cu 360° minus măsura arcului complementar lui.

$$m(\smile ACB) = 360° - m(\angle AOB)$$



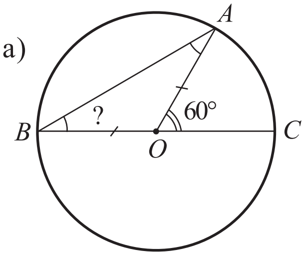
$\angle AOB$ – unghi la centru

• Aflaţi măsura unui arc, dacă măsura arcului complementar lui este egală cu:

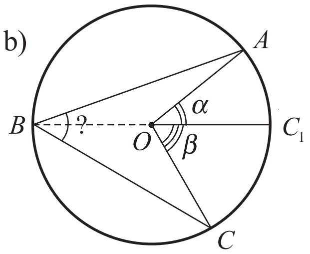
a) 80°; b) 130°; c) 150°45′; d) 212°17′.

5 Examinați desenele și aflați $m(\angle ABC)$.

a)



b)



Rezolvare:

a) ΔAOB este isoscel, deci, $\angle ABO \equiv \angle BAO$. (*)

$\angle AOC$ este unghi exterior al triunghiului AOB.

Deci, $m(\angle AOC) = m(\angle ABO) + m(\angle BAO) \overset{(*)}{=} 2 \cdot m(\angle ABO)$.

Prin urmare, $m(\angle ABO) = \frac{1}{2} m(\angle AOC) = 30°$, adică $m(\angle ABC) = 30°$.

b) Similar cazului a) obținem:

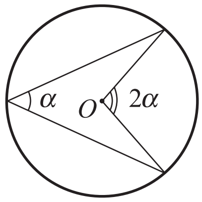
$m(\angle ABC_1) = \frac{\alpha}{2}$, $m(\angle CBC_1) = \frac{\beta}{2}$, adică $m(\angle ABC) = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Observație Unghiul ABC din fiecare desen al sarcinii **5** este ***unghi înscris în cerc***.

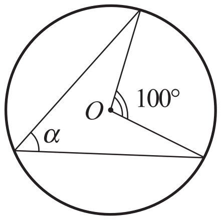
Definiție

Se numește **unghi înscris în cerc** unghiul cu vârful pe cerc și ale cărui laturi intersectează cercul.

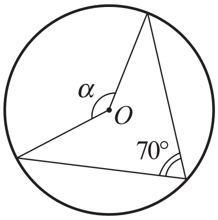
- Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturile lui.



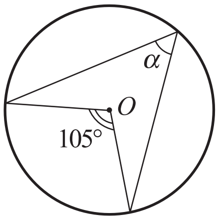
- Aflați măsura α a unghiului (O este centrul cercului):



a)



b)



c)

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Citiți: a) $A \in b$, $M \notin c$, $N \in [AM]$;
b) $a \parallel b$, $a \cap c = \{M\}$, $b \cap c = \{N\}$;
c) $MN > AB$, $AB \perp MN$, $A \in MN$, $B \in MN$;
d) $d \parallel l$, $AB \perp m$, $\{A, B, C\} \subset d$.

2. Construiți câte un desen pentru fiecare din cazurile a)–d) ale exercițiului **1**.

3. Fie punctele A și B cu $d(A, B) = 0{,}000001$ mm. Alegeți propoziția adevărată:
a) Între A și B există un singur punct.
b) Între A și B există numai două puncte.
c) Între A și B există numai cinci puncte.
d) Între A și B există o infinitate de puncte.

4. Completați:
a) 24 dm = ___ cm; b) 890 mm = ___ dm;
c) 7,5 m = ___ cm; d) 64 900 cm = ___ km;
e) 0,065 km = ___ dm; f) 7,05 m = ___ mm.

5. Desenați un unghi ascuțit notat AOB.
a) Construiți un unghi adiacent și complementar unghiului AOB folosind rigla.
b) Construiți un unghi adiacent și complementar unghiului AOB prin îndoirea foii de hârtie.
c) Câte soluții are problema?
d) Dacă măsura unghiului AOB este 62° aflați măsura complementului lui.

6. Desenați unghiul AOB de 40°.
a) Construiți unghiul adiacent şi suplementar unghiului AOB folosind rigla.
b) Construiți unghiul adiacent şi suplementar unghiului AOB prin îndoirea foii de hârtie.
c) Câte soluții are problema?

7. Desenați un unghi de 50°.
a) Construiți axa de simetrie a unghiului prin îndoirea foii de hârtie.
b) Construiți axa de simetrie a unghiului folosind rigla şi compasul.
c) Completați propoziția: „Axa de simetrie a unui unghi este ...”.

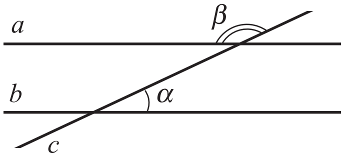
8. Fie punctele A şi B cu $d(A, B) = 0{,}0003$ cm.
a) La ce distanță de A se află mijlocul C al segmentului AB?
b) La ce distanță de A se află mijlocul D al segmentului AC?
c) La ce distanță de A se află mijlocul E al segmentului AD?
d) La ce distanță de A se află mijlocul F al segmentului AE?

9. Unul din cele 4 unghiuri formate de două drepte concurente are măsura de 44°. Aflați măsurile celorlalte unghiuri.

10. Aflați măsurile a două unghiuri:
a) opuse la vârf şi suplementare;
b) complementare, ştiind că măsura unui unghi este cu 10° mai mare decât a celuilalt;
c) suplementare, ştiind că măsura unui unghi este de 9 ori mai mare decât a celuilalt;
d) congruente şi adiacente, ştiind că măsura unghiului format de bisectoarele lor este de 50°.

11. Punctele M, N, K sunt situate, în această ordine, pe o dreaptă şi $MN : NK = 3 : 4$.
Aflați: a) $\frac{MK}{MN}$; b) $\frac{NK}{MK}$.

12. Dreptele a şi b din desen sunt paralele.
Aflați măsura unghiului necunoscut (α sau/şi β), dacă:
a) $\alpha = 25°$; b) $\beta = 120°$; c) $\beta - \alpha = 40°$.



13. Stabiliți dacă următoarele trei numere pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi (exprimate în aceeaşi unitate de măsură):
a) 9, 10, 16; b) 8, 12, 20; c) $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{11}$; d) $\sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{14}$.

14. Construiți un desen corespunzător situației:
a) Punctul M este mijlocul bazei triunghiului obtuzunghic isoscel ABC.
b) Triunghiurile ABC şi CMB sunt isoscele şi $AM \cap BC = \{D\}$.
c) Triunghiurile ABF şi GDE sunt echilaterale şi $G \in [AF]$, $F \in [GE]$.
d) $\Delta BAE \equiv \Delta DEA$, $[BE] \cap AD = \{C\}$.

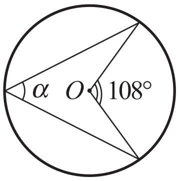
15. Segmentele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt mediane ale triunghiului ABC. Aflați perimetrul triunghiului ABC, dacă:
a) $BC_1 = 9$ cm, $BA_1 = 10$ cm, $AB_1 = 12$ cm;
b) $BA_1 = 3\sqrt{5}$ cm, $AC_1 = \sqrt{125}$ cm, $CB_1 = 2\sqrt{20}$ cm.

16. Câte puncte comune au un cerc şi o dreaptă, dacă raza cercului este egală cu $5\sqrt{12}$ cm, iar distanța dintre centrul cercului şi dreaptă este egală cu:
a) $6\sqrt{8}$ cm; b) $10\sqrt{3}$ cm; c) $12\sqrt{5}$ cm; d) $15\sqrt{2}$ cm?

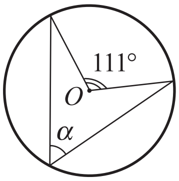
17. Punctele A, B, C aparțin unui cerc în această ordine. Aflați:
a) $m(\smile AB)$, dacă $m(\smile ACB) = 100°$; b) $m(\smile ACB)$, dacă $m(\smile AB) = 140°$;
c) $m(\smile AC)$, dacă $m(\smile ABC) = 25°$; d) $m(\smile BC)$, dacă $\smile AB \equiv \smile BC \equiv \smile AC$.

18. Aflați măsura α a unghiului (O este centrul cercului):

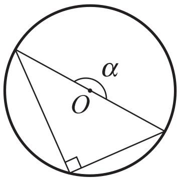
a)



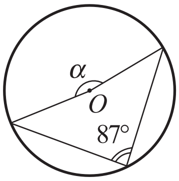
b)



c)



d)



19. Fie triunghiul ABC. Măsura unghiului A este de 2 ori mai mare decât măsura unghiului B și de 3 ori mai mică decât măsura unghiului C. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului.

20. Construiți un triunghi cu laturile de 6 cm, 7 cm, 8 cm.

21. Construiți un triunghi cu două laturi de 8 cm și 9 cm și unghiul dintre ele de 45°.

22. Construiți un triunghi cu o latură de 10 cm și unghiurile alăturate ei de 30° și 80°.

23. Calculați perimetrul unui triunghi:
a) isoscel știind că o latură este 7 cm, iar alta de 15 cm;
b) echilateral cu linia mijlocie de 12 cm;
c) scalen, ale cărui laturi au lungimile numere naturale consecutive pare, cea mai lungă fiind de 28 cm.

24. Calculați:
a) $31°40'29'' + 46°24'37''$;
b) $118°27'35'' + 36°27'18''$;
c) $90° - 17°55'56''$;
d) $142° - 72°34'56''$.

25. Punctul M_1 este proiecția ortogonală a punctului $M\,(a,\,b)$ pe axa absciselor a unui sistem de axe ortogonale. Aflați coordonatele punctului M_1, dacă:
a) $a = 3,\ b = -\sqrt{8}$; b) $a = -0{,}4,\ b = 2\sqrt{5}$.

26. Punctul M aparține bisectoarei unghiului AOB. Aflați distanța de la punctul M la semidreapta $[OA$, dacă distanța de la punctul M la semidreapta $[OB$ este egală cu:
a) $|\sqrt{7} - 3|$ cm; b) $|3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}|$ cm.

27. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale unui triunghi:
a) dreptunghic cu un unghi de 40°; b) isoscel cu un unghi de 110°; c) cu un unghi de 30° și altul de 80°.

28. Medianele AM și BN ale triunghiului ABC se intersectează în punctul P. Aflați:
a) PM și PN, dacă $AP = 24$ cm, $BP = 30$ cm; b) AP și BP, dacă $PM = \sqrt{6}$ cm, $PN = \sqrt{7}$ cm.

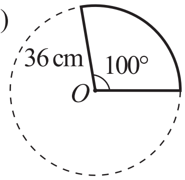
29. a) Construiți un pătrat cu latura de 5 cm. b) Construiți un dreptunghi cu laturile de 5 cm și 7 cm.
c) Construiți un pătrat cu diagonala de 7 cm. d) Construiți un dreptunghi cu diagonala de 13 cm.

☐ **2** ☐

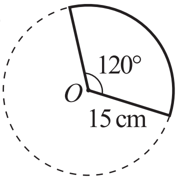
30. Examinați desenul și calculați lungimea arcului de cerc, știind măsura unghiului la centru corespunzător arcului și raza cercului (O este centrul cercului):

$L_{\bigcirc} = 2\pi R$

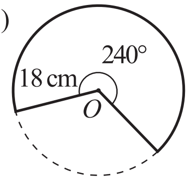
a)



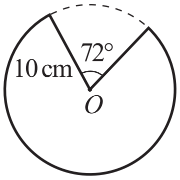
b)



c)



d)



31. Pe o dreaptă au fost marcate la distanțe egale unul de altul 20 de puncte, astfel încât primul și ultimul determină un segment de lungime x. Pe altă dreaptă au fost marcate similar (la aceeași distanță) 200 de puncte, astfel încât primul și ultimul formează un segment de lungime y. De câte ori x este mai mic decât y?

32. Triunghiul RTS are $RT = 8$ cm, $TS = 11$ cm și raza cercului circumscris de 6 cm. Construiți triunghiul RTS.

33. a) Construiți un triunghi echilateral cu o înălțime de 4 cm.
b) Triunghiurile echilaterale ADI și BCE au înălțimile congruente. Cercetați dacă triunghiurile sunt congruente.

34. Demonstrați că un triunghi isoscel este echilateral dacă și numai dacă are un unghi de 60°.

35. Calculați perimetrul unui triunghi echilateral cu linia mijlocie de $\frac{9}{\sqrt{3}}$ cm.

36. Aflați măsurile unghiurilor formate la intersecția:
a) a două mediane ale triunghiului echilateral;
b) a trei înălțimi ale triunghiului echilateral.

37. Mediana AA_1 și bisectoarea BB_1 ale triunghiului echilateral ABC se intersectează în punctul M. Aflați aria triunghiului A_1BM, dacă aria triunghiului ABC este egală cu 216 cm².

38. Dacă mărim cu 8 cm lățimea unui dreptunghi, obținem un pătrat cu perimetrul de 96 cm. Aflați perimetrul dreptunghiului.

☐ ☐ **3**

39. Fie ABC un triunghi isoscel cu $[AB] \equiv [BC]$. Punctele M și N aparțin exteriorului triunghiului ABC, astfel încât triunghiurile ABM și BCN sunt echilaterale.
Demonstrați că $MN \parallel AC$.

40. Suma distanțelor de la vârfurile triunghiului ABC la dreapta d este egală cu 30 cm. Aflați suma distanțelor de la mijloacele laturilor triunghiului ABC la dreapta d.

41. Punctul O aparține interiorului pătratului $ABCD$.
Demonstrați că dacă $m(\angle OCD) = m(\angle ODC) = 15°$, atunci triunghiul AOB este echilateral.

§2. Elemente de logică matematică. Aplicații

Ne amintim

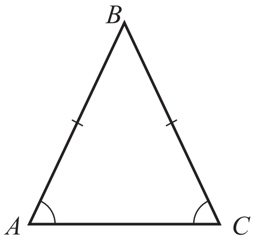
- O **propoziție** (matematică) este un enunț despre care se poate stabili cu certitudine că este adevărat sau că este fals. Dacă o propoziție este adevărată, spunem că ea are **valoarea** de adevăr *Adevărat*, altfel – valoarea de adevăr *Fals*.
- Propozițiile matematice adevărate care se admit fără demonstrații se numesc **axiome**.
- O propoziție matematică al cărei adevăr se demonstrează se numește **teoremă**.
- Din propoziții simple, cu ajutorul cuvintelor *și*, *sau*, *dacă...*, *atunci...* se formează propoziții compuse.

1 Fie teorema: *Unghiurile alăturate bazei unui triunghi isoscel sunt congruente.*
Pentru a pune în evidență ipoteza și concluzia acestei teoreme, o rescriem astfel:

$$\textit{Dacă } \underbrace{\textbf{un triunghi este isoscel}}_{\text{Ipoteza}}\textit{, atunci } \underbrace{\textbf{unghiurile alăturate bazei lui sunt congruente}}_{\text{Concluzia}}.$$

Examinați schema și observați legătura dintre teorema directă menționată și reciproca ei.

Teorema directă	Reciproca
Ipoteză: ΔABC, $[AB] \equiv [BC]$	*Ipoteză*: ΔABC, $\angle A \equiv \angle C$
Concluzie: $\angle A \equiv \angle C$	*Concluzie*: $[AB] \equiv [BC]$



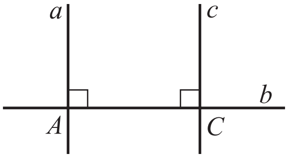
a) Determinați ipoteza și concluzia teoremei: *Unghiurile opuse la vârf sunt congruente.*
b) Formulați reciproca acestei teoreme și aflați valoarea ei de adevăr.

DIN ISTORIE...

„Teoremă” provine din cuvântul grecesc *theoreo*: „examinez, cercetez” şi în antichitate avea sensul de show, animație. Această denumire dată unei afirmații a prins rădăcini, deoarece în acele timpuri teoremele erau demonstrate public în piețe, târguri, adesea având caracteristicile unui pariu sau ale unei dezbateri.

2 Fie teorema:

În plan, două drepte perpendiculare pe aceeaşi dreaptă sunt paralele între ele.

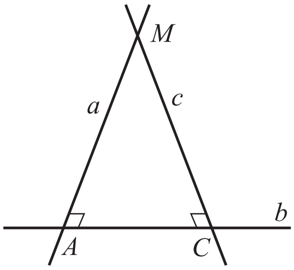


Să demonstrăm această teoremă.

Ipoteză:	*Concluzie*:
$a\perp b$	$a\parallel c$
$c\perp b$	

Demonstrație:

Notăm $a\cap b=\{A\}$, $c\cap b=\{C\}$. <u>Presupunem că</u> $a\nparallel c$, adică $a\cap c=\{M\}$.



Obținem că triunghiul AMC are două unghiuri de 90°: $m(\angle MAC)=m(\angle MCA)=90°$, ceea ce este imposibil (suma unghiurilor într-un triunghi este 180°).

Această contrazicere demonstrează că presupunerea a fost greşită, deci, $a\parallel c$, c.c.t.d. ►

Comentariu. Teorema a fost demonstrată prin **metoda reducerii la absurd**. Această metodă se aplică nu doar la demonstrații matematice, dar şi în raționamente logice cotidiene.

- Demonstrați prin metoda reducerii la absurd justețea următoarelor afirmații:

a) Unghiurile alăturate bazei oricărui triunghi isoscel sunt ascuțite.

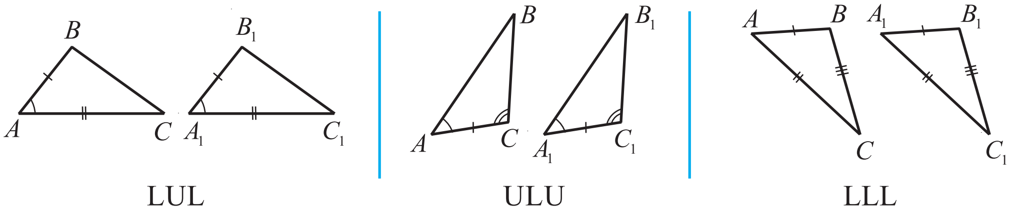
b) Crocodilul nu este pasăre.

c) Cuvântul *sport* nu este verb.

d) Dacă latura unui pătrat este mai mare decât 10 cm, atunci aria lui este mai mare decât 100 cm².

Ne amintim **3**

Criteriile de congruență a două triunghiuri oarecare

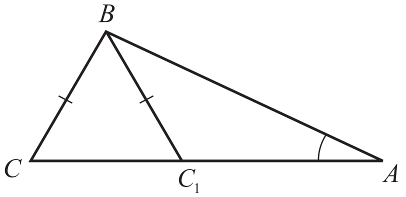


$\Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$

Domnul X consideră că există încă un criteriu de congruență a două triunghiuri, şi anume:

Dacă două laturi şi un unghi ale unui triunghi sunt respectiv congruente cu două laturi şi un unghi ale altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sunt congruente.

Andrei Plindeidei a contrazis această afirmație prin următorul desen:



Analizăm ΔABC şi ΔABC_1.
Observăm că $\angle A \equiv \angle A$,
$[AB] \equiv [AB]$, $[BC] \equiv [BC_1]$,
însă $\Delta ABC \not\equiv \Delta ABC_1$

Exemplul găsit este un **contraexemplu**, deoarece contrazice afirmația domnului X, demonstrând astfel că ea este falsă.

- Găsiți un contraexemplu pentru afirmația:

a) Toate numerele prime sunt pare.
b) Toate păsările pot zbura.
c) Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $|a| > 0$.
d) Suma a două numere iraționale este un număr irațional.

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Selectați propozițiile matematice şi stabiliți valoarea lor de adevăr:
a) Există numere prime pare.
b) Iarna cerne norii de zăpadă.
c) Uneori, primăvara plouă.
d) Există numere compuse impare.
e) Cine arvoneşte, acela plăteşte.
f) Nu fumați!

2. Aflați valoarea de adevăr a propoziției:
a) Dacă $a \perp b$ şi $a \perp c$, atunci $b \perp c$.
b) Ultima cifră a numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 42$ este 0.
c) Numărul 123456 se divide cu 4.
d) Alfabetul limbii române conține exact 5 vocale.
e) Orice trei puncte diferite ale unui cerc sunt necoliniare.

3. Formulați negația propoziției:
a) $8 \cdot 8 = 64$.
b) $3\sqrt{5} > 4\sqrt{3}$.
c) Numărul 5 este soluție a ecuației $2x^2 - 3x - 35 = 0$.
d) Numărul 7 nu este soluție a inecuației $x - 1 > 5$.
e) Orice enunț este o propoziție matematică.

4. Aflați valoarea de adevăr:
a) a propozițiilor din exemplul precedent;
b) a negațiilor propozițiilor din exemplul precedent.

5. Determinați ipoteza şi concluzia teoremei:
a) Dacă numărul natural se divide cu 4, atunci el se divide cu 2.
b) Dacă $a > b$, atunci $a + c > b + c$, pentru orice numere reale a, b, c.
c) Dacă ultima cifră a numărului natural este 0, atunci acest număr se divide cu 5.
d) Dacă un triunghi este echilateral, atunci unghiurile lui sunt congruente.
e) Dacă $[AC]$ este cea mai lungă latură a triunghiului ABC, atunci unghiul B are măsura cea mai mare.

6. Formulați reciprocele teoremelor din exercițiul precedent şi aflați valoarea lor de adevăr.

7. Formulați un contraexemplu pentru afirmația:
a) Produsul oricăror două numere iraționale nu este număr întreg.
b) Toate soluțiile naturale ale inecuației $|x| < 4$ sunt numere pare.
c) Pentru orice numere reale *a* şi *b*, dacă $a > b$, atunci $a^2 > b^2$.
d) Orice număr de forma $2^n - 1$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, este număr prim.

8. Demonstrați prin metoda reducerii la absurd următoarele afirmații adevărate:
a) O dreaptă şi un cerc pot avea cel mult două puncte comune.
b) Dacă azi este miercuri, atunci mâine va fi joi.
c) Orice punct al bisectoarei unui unghi este egal depărtat de laturile acestui unghi.

☐ **2** ☐

9. Determinați ipoteza şi concluzia teoremei:
a) Mediana cuprinsă între laturile congruente ale unui triunghi isoscel este şi o bisectoare a acestui triunghi.
b) Unghiurile corespondente formate de două drepte paralele cu o secantă sunt congruente.
c) Linia mijlocie a unui triunghi este paralelă cu o latură a triunghiului.
d) Diagonalele unui paralelogram se intersectează în mijlocul lor.
e) Punctele mediatoarei unui segment sunt egal depărtate de extremitățile acestuia.

10. Fie *d* distanța de la centrul cercului $\mathscr{C}(O, r)$ la dreapta *l*. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:
a) Dreapta *l* este exterioară cercului, dacă şi numai dacă $d > r$.
b) Dacă $d < r$, atunci dreapta *l* este secantă la cerc.
c) Dacă $d = r$, atunci dreapta *l* este tangentă la cerc.

Dacă *X* este o propoziție, atunci $\overline{X}$ este negația ei.

11. Fie propozițiile: *A*: *Numărul* 24 *se divide cu* 8. *B*: *Numărul* 24 *se divide cu* 9.
Aflați valoarea de adevăr a propoziției compuse:
a) *A* sau *B*. b) *A* şi *B*. c) $\overline{B}$ şi *A*. d) $\overline{A}$ sau $\overline{B}$. e) $\overline{A}$ şi *B*.

12. Fie enunțurile: *A*: *Numărul natural a este compus*. *B*: *Numărul natural a este par*.
Aflați valoarea de adevăr a propoziției:
a) Dacă *A*, atunci *B*. b) Dacă *B*, atunci *A*. c) Dacă $\overline{A}$, atunci $\overline{B}$. d) Dacă $\overline{B}$, atunci $\overline{A}$.

13. Arătați prin contraexemple că următoarea afirmație este falsă:
a) $\frac{\sqrt{a}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b^2}}$, pentru orice numere reale *a*, *b*, unde $b \neq 0$. b) $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}$, pentru orice numere reale *a*, *b*, unde $b \neq 0$.

14. Fie enunțurile: *A*: *Domnul X este pianist*. *B*: *Domnul X este muzicant*.
Aflați valoarea de adevăr a propoziției:
a) Dacă *A*, atunci *B*. b) Dacă *B*, atunci *A*. c) Dacă $\overline{A}$, atunci $\overline{B}$. d) Dacă $\overline{B}$, atunci $\overline{A}$.

☐ ☐ **3**

15. Propoziția „Dacă *A*, atunci *B*” este adevărată. Care este valoarea de adevăr a propoziției „Dacă $\overline{B}$, atunci $\overline{A}$”? Justificați prin exemple.

Matematică distractivă

16. Pe o pagină sunt scrise 10 propoziții:

Această pagină conține exact o propoziție falsă.
Această pagină conține exact două propoziții false.
Această pagină conține exact trei propoziții false.
. . .
Această pagină conține exact zece propoziții false.

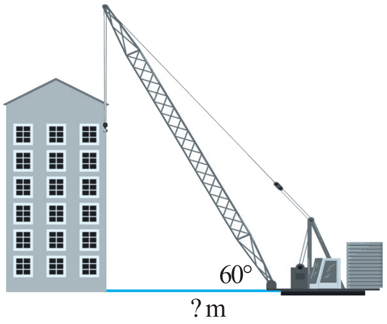
Care dintre aceste propoziții este adevărată?

17. Adi spune întotdeauna adevărul, iar Minciu spune întotdeauna minciuni. La ce întrebare ei vor da același răspuns?

18. ***Matematică pentru construcții***

Brațul macaralei are lungimea de 36 m.

Care este distanța de la partea din față a macaralei până la clădire?



Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta 1

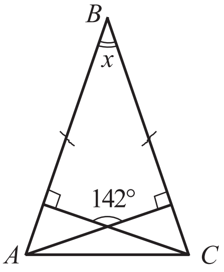
1. Realizați un desen corespunzător situației:

$AB \cap CD = \{M\}$,

$EF \cap CD = \{N\}$,

$AB \parallel EF$, $MN \perp AB$.

2. Examinați desenul ($[AB] \equiv [BC]$) și calculați x:



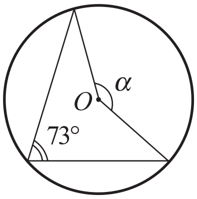
3. Aflați măsurile complementului și suplementului unui unghi de 78°.

4. Scrieți unghiurile triunghiului ABC în ordinea descrescătoare a măsurilor lor, dacă:

$$\frac{AC}{AB} < 0{,}7 \text{ și } \frac{BC}{AB} > 1{,}1.$$

5. Aflați lungimea arcului de cerc cu măsura de 40° știind că raza cercului este egală cu 27 cm.

6. Calculați valoarea α a unghiului (O este centrul cercului).



7. Demonstrați că dacă un triunghi dreptunghic are un unghi de 45°, atunci acest triunghi este isoscel.

Varianta 2

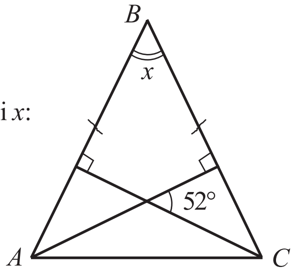
1. Realizați un desen corespunzător situației:

$a \cap b = \{A\}$, $a \cap c = \{B\}$,

$b \cap c = \{C\}$,

$\text{m}(\angle BAC) = 90°$.

2. Examinați desenul ($[AB] \equiv [BC]$) și calculați x:



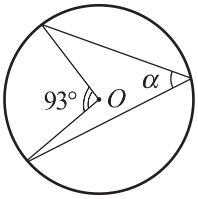
3. Aflați măsurile complementului și suplementului unui unghi de 119°.

4. Scrieți laturile triunghiului ABC în ordinea crescătoare a lungimilor lor, dacă:

$$\frac{\text{m}(\angle B)}{\text{m}(\angle A)} < 0{,}85.$$

5. Aflați lungimea arcului de cerc cu măsura de 60° știind că raza cercului este egală cu 33 cm.

6. Calculați valoarea α a unghiului (O este centrul cercului).



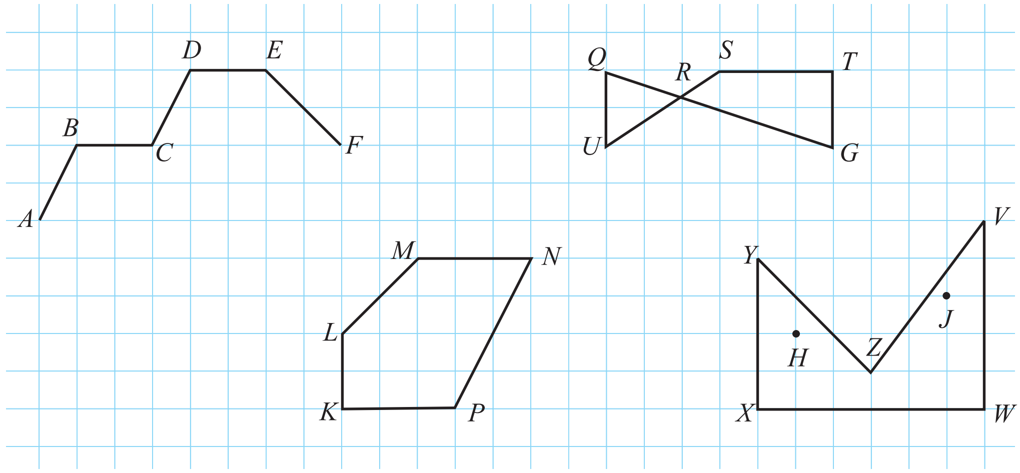
7. Demonstrați că dacă diagonalele unui dreptunghi sunt perpendiculare, atunci acest dreptunghi este pătrat.

Capitolul 2 Patrulatere. Poligoane

> *Matematica este corectă, precisă; ea nu înşală.*
> Gheorghe Vrânceanu

§1. Poligoane convexe

1 Examinați liniile poligonale din desen.



Completați:

a) *ABCDEF* este ________ .

b) ________ sunt linii frânte închise.

c) Liniile poligonale ________ sunt poligoane, deoarece ________ .

d) Poligoanele ________ se numesc ________ , deoarece au câte 5 laturi.

e) Poligonul ________ are diagonalele ________ .

Definiții

- Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ puncte distincte, fiecare trei consecutive fiind necoliniare. Reuniunea segmentelor $[A_1, A_2], [A_2, A_3], ..., [A_{n-1}, A_n]$ se numeşte **linie poligonală** (sau **linie frântă**). Punctele $A_1, A_2, ..., A_n$ se numesc **vârfurile liniei poligonale**.
- O linie poligonală închisă ale cărei laturi nu au alte puncte comune decât vârfurile liniei se numeşte **poligon**.
- Porțiunea planului mărginită de laturile poligonului se numeşte **interiorul poligonului**. Cealaltă porțiune a planului se numeşte **exteriorul poligonului**.

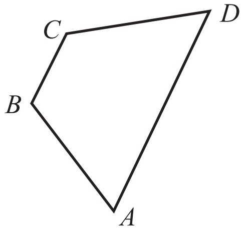
• Găsiți poligonul din desenul de mai sus în care orice două puncte din interiorul poligonului determină un segment care este inclus în interiorul acestuia.

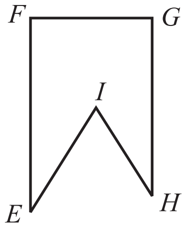
Definiții

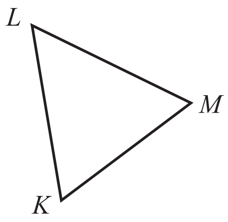
- Poligonul se numește **convex** dacă orice două puncte diferite din interiorul poligonului determină un segment inclus în interiorul poligonului.
- Poligonul se numește **concav** dacă există două puncte diferite din interiorul poligonului care determină un segment ce nu este inclus în interiorul poligonului.
- Se numește **diagonală** a poligonului convex segmentul ce unește două vârfuri nealăturate unei laturi.
- Poligoanele cu 4 laturi (respectiv, 5 laturi, 6 laturi) se numesc **patrulatere** (respectiv, **pentagoane**, **hexagoane**).

Poligonul *KLMNP* din desenul sarcinii **1** este convex, iar poligonul *XYZVW* este concav, deoarece $[HJ]$ nu este inclus în interiorul poligonului.

• Identificați poligoanele convexe.





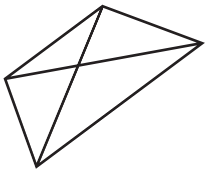


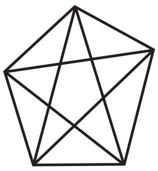
2 Construiți un poligon convex cu:

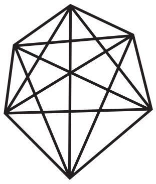
a) 4 laturi; b) 5 laturi; c) 6 laturi; d) 8 laturi.

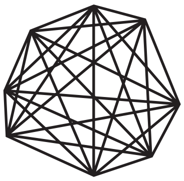
1. Stabiliți numărul diagonalelor ce conțin un vârf al poligonului.
2. Stabiliți numărul diagonalelor fiecărui poligon.
3. Calculați suma măsurilor unghiurilor fiecărui poligon.

Generalizați pentru un poligon convex cu n laturi.


a) patrulater


b) pentagon


c) hexagon


d) octogon

Rezolvare:

1. a) Un vârf al *patrulaterului* este conținut de o singură diagonală.
   b) Un vârf al *pentagonului* este conținut de 2 diagonale.
   c) Un vârf al *hexagonului* este conținut de 3 diagonale.
   d) Dacă poligonul are 8 laturi, el se numește *octogon*. Un vârf al octogonului este conținut de 5 diagonale. Prin urmare, un vârf al unui poligon cu n laturi este conținut de $n-3$ diagonale.
2. a) Patrulaterul are două diagonale.
   b) Pentagonul are 5 diagonale.
   c) Hexagonul are 9 diagonale.
   d) Octogonul are 20 de diagonale.

Deoarece din fiecare vârf al poligonului convex cu n laturi pot fi construite $n-3$ diagonale, în total, pot fi construite $n(n-3)$ diagonale. Dar, pentru oricare două vârfuri „nealăturate“, două dintre diagonalele construite din aceste vârfuri coincid. De aceea, în total, poligonul convex cu n laturi are $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonale.

3. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu $180°$. Deoarece cele $n-3$ diagonale duse din acelaşi vârf al unui poligon convex împart poligonul în $n-2$ triunghiuri, rezultă că suma S_n a măsurilor unghiurilor unui poligon convex este egală cu $180°(n-2)$.

Deci, $S_4 = 360°$, $S_5 = 540°$, $S_6 = 720°$, $S_8 = 1080°$.

Rețineți

Dacă un poligon convex are n laturi, atunci:
a) dintr-un vârf al lui pot fi construite $n-3$ diagonale;
b) el are $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonale;
c) suma măsurilor unghiurilor sale este egală cu $180°(n-2)$.

3 Luând în considerare că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu $180°$, reproduceți şi completați tabelul.

Denumirea poligonului	*Numărul de laturi*	*Numărul de diagonale ce pornesc dintr-un vârf*	*Suma măsurilor unghiurilor poligonului*
Patrulater convex	4		
Pentagon convex			
Hexagon convex			

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Desenați şi notați o linie poligonală:
   a) deschisă, cu 5 laturi care nu au alte puncte comune decât vârfurile liniei;
   b) deschisă, cu 6 laturi care se intersectează în puncte diferite de vârfurile liniei;
   c) închisă, cu 5 laturi care nu au alte puncte comune decât vârfurile liniei;
   d) închisă, cu 7 laturi care se intersectează în puncte diferite de vârfurile liniei.
2. Desenați un poligon:
   a) convex cu 5 laturi; b) concav cu 6 laturi;
   c) convex cu 7 laturi; d) concav cu 8 laturi.
3. Câte diagonale se pot construi din acelaşi vârf al unui poligon cu:
   a) 5 laturi; b) 6 laturi; c) 7 laturi; d) 10 laturi?
4. Calculați suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu:
   a) 6 laturi; b) 7 laturi; c) 8 laturi; d) 10 laturi.
5. Calculați perimetrul unui poligon convex cu laturile de:
   a) $7\frac{1}{3}$ cm, 6,(2) cm, 6 cm, 7,(8) cm;
   b) $8\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{300}$ cm, $\sqrt{192}$ cm, $\sqrt{243}$ cm.
6. Aflați măsurile celorlalte unghiuri ale unui patrulater convex cu două laturi paralele, dacă două unghiuri opuse ale patrulaterului au măsurile:
   a) 60° şi 100°; b) 110° şi 90°.
7. Aflați măsurile unghiurilor unui poligon convex cu n laturi congruente, dacă:
   a) $n=4$; b) $n=5$; c) $n=6$; d) $n=10$.
8. Unghiurile A şi B ale patrulaterului convex $ABCD$ sunt suplementare. Care este poziția relativă a dreptelor AD şi BC?
9. Perimetrul unui patrulater convex este de 50 cm. Calculați lungimile laturilor patrulaterului, ştiind că lungimile lor, exprimate în centimetri, reprezintă numere naturale consecutive.

☐ **2** ☐

10. Există oare un poligon convex cu laturile de:
    a) 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 9 cm; b) 2 cm, 4 cm, 10 cm, 4 cm; c) 0,6 cm, 0,1 cm, $\frac{1}{3}$ cm, $\frac{1}{9}$ cm?

11. Aflați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, dacă ele sunt direct proporționale cu numerele:
a) 2, 3, 4, 6; b) 2, 3, 6, 7; c) 6, 8, 10, 12.

12. Aflați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, dacă ele sunt invers proporționale cu numerele:
a) 2, 3, 6, 9; b) 1, 2, 3, 6; c) 1, 2, 3, 4.

☐ ☐ **3**

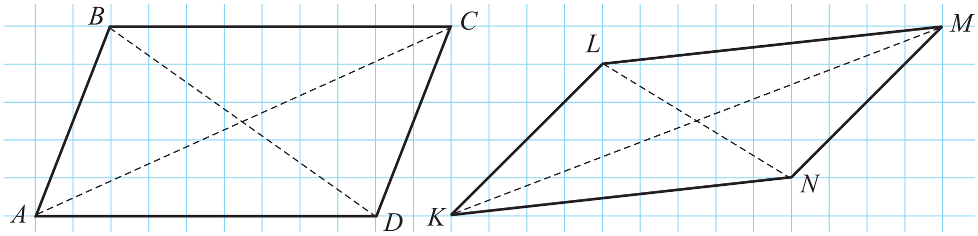
13. Câte diagonale are un poligon convex cu:
a) 5 laturi; b) 6 laturi; c) 7 laturi; d) 10 laturi?

14. Demonstrați că un poligon convex cu n laturi are $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonale.

15. **Unghi exterior** al poligonului convex se numește unghiul adiacent acestui unghi al poligonului. Demonstrați că măsura unghiului exterior al unui patrulater convex este egală cu suma măsurilor unghiurilor patrulaterului neadiacente lui minus 180°.

§2. Paralelograme

1 Examinați desenul.



Utilizând instrumentele necesare, stabiliți:

a) ce relații există între laturile opuse ale fiecărui patrulater. Dar între unghiurile opuse? Dar între două unghiuri consecutive?

b) proprietățile punctului de intersecție a diagonalelor fiecărui patrulater.

Definiție

Patrulaterul cu două perechi de laturi paralele se numește **paralelogram**.

Patrulaterele $ABCD$ și $KLMN$ sunt paralelograme.

Teorema 1

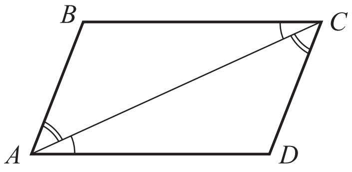
Laturile opuse ale unui paralelogram sunt congruente.

Să demonstrăm teorema 1.

Ipoteză: $ABCD$ – paralelogram, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

Concluzie: $[AB] \equiv [CD]$, $[AD] \equiv [BC]$.

Demonstrație:



① $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$ (Criteriul ULU: $[AC]$ – latură comună, $\angle BAC \equiv \angle DCA$, $\angle ACB \equiv \angle CAD$ – perechi de unghiuri alterne interne).

② Din ① rezultă că $[AB] \equiv [CD]$, $[AD] \equiv [BC]$, c.c.t.d. ▶

• Completați astfel încât să obțineți reciproca teoremei 1, care, de asemenea, este adevărată: *Dacă laturile opuse ale unui patrulater convex* ______ , *atunci patrulaterul este* ______ .

• Similar demonstrației teoremei 1, arătați justețea următoarelor propoziții:

Teorema 2 Unghiurile opuse ale unui paralelogram sunt congruente.

Teorema 3 Două unghiuri consecutive ale unui paralelogram sunt suplementare.

Teorema 4 Punctul de intersecție a diagonalelor unui paralelogram este mijlocul diagonalelor lui.

Reciprocele teoremelor 2–4, de asemenea, sunt adevărate. Atât definiția paralelogramului, cât şi fiecare dintre reciprocele teoremelor 1–4 ne permit să stabilim în ce caz patrulaterul este paralelogram.

Criteriile paralelogramului

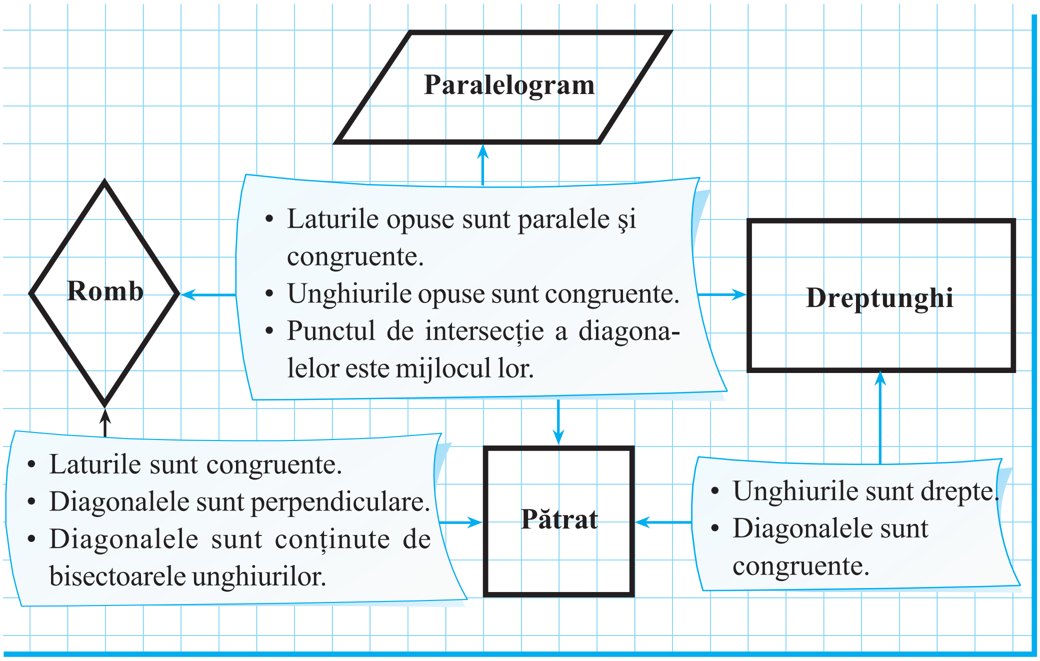
Un patrulater convex este paralelogram dacă respectă cel puțin una din condițiile:

1. patrulaterul are două perechi de laturi paralele;
2. patrulaterul are o pereche de laturi paralele şi congruente;
3. patrulaterul are două perechi de laturi opuse congruente;
4. patrulaterul are două perechi de unghiuri opuse congruente;
5. patrulaterul are perechile de unghiuri consecutive suplementare;
6. diagonalele patrulaterului au acelaşi mijloc.

2 Completați cu unul din cuvintele *pătrat*, *dreptunghi*, *romb*, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

a) Paralelogramul cu un unghi drept este __________.
b) Dreptunghiul cu două laturi consecutive congruente este __________.
c) Paralelogramul cu două laturi consecutive congruente este __________.
d) __________ are toate unghiurile drepte.
e) __________ are laturile congruente.

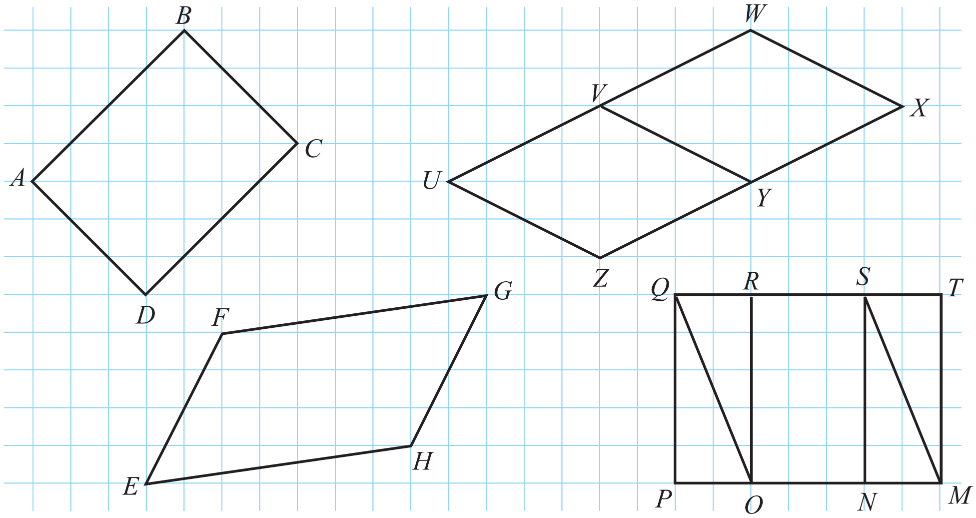
- Examinați schema şi formulați teoreme.



Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Examinați desenul și selectați:
a) pătratele;
b) dreptunghiurile;
c) paralelogramele;
d) romburile.



2. Aflați perimetrul unui paralelogram cu laturile de:
a) 3,5 cm și 4,5 cm; b) $9\sqrt{5}$ cm și $\sqrt{180}$ cm.

3. Aflați perimetrul rombului cu latura de:
a) 8,2 cm; b) 7,(6) cm.

4. Realizați un desen pentru care este adevărată propoziția:
a) [*AB*] și [*CD*] sunt diagonalele unui paralelogram.
b) Lungimea dreptunghiului *ABCD* este de 1,5 ori mai mare decât lățimea lui.
c) *ABCD* este dreptunghi, iar *AEFD* este paralelogram.
d) Patrulaterul *ABCD* are diagonalele congruente și nu este paralelogram.

5. *Adevărat* sau *Fals*?
a) Lungimea laturii unui romb reprezintă 25% din perimetrul rombului.
b) Rombul cu diagonalele congruente este pătrat.
c) Paralelogramul cu laturile congruente este pătrat.
d) Dacă diagonalele unui patrulater sunt perpendiculare, atunci acest patrulater este romb.

6. Un unghi al paralelogramului are măsura de 35°. Aflați măsurile celorlalte unghiuri ale paralelogramului.

7. Un unghi al paralelogramului are măsura de 5 ori mai mare decât a altui unghi al paralelogramului. Aflați măsurile unghiurilor paralelogramului.

8. Un unghi al rombului are măsura cu 20° mai mică decât a altui unghi al rombului. Aflați măsurile unghiurilor rombului.

☐ **2** ☐

9. *ABCD* este un dreptunghi cu diagonala de 10 cm. Aflați raza cercului care conține punctele *A*, *B* și *C*.

10. Diagonalele rombului *ABCD* cu latura de 12 cm se intersectează în punctul *O*. Aflați raza cercului care conține punctele *A*, *B*, *O*.

11. Perimetrul unui patrulater este de 1 m. Aflați lungimile laturilor patrulaterului, știind că, exprimate în centimetri, ele reprezintă numere pare consecutive.

12. Dacă mărim cu 11 cm lățimea unui dreptunghi, obținem un pătrat cu perimetrul de 112 cm. Care este perimetrul dreptunghiului?

13. Perimetrul paralelogramului *ABCD* este egal cu 50 cm. Aflați distanța dintre dreptele *AD* și *BC*, dacă $m(\angle A)=30°$ și $BC=16$ cm.

14. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 70 cm. Aflați dimensiunile dreptunghiului, știind că dacă lungimea lui se mărește cu 10 cm, se obține dublul lățimii dreptunghiului.

☐ ☐ **3**

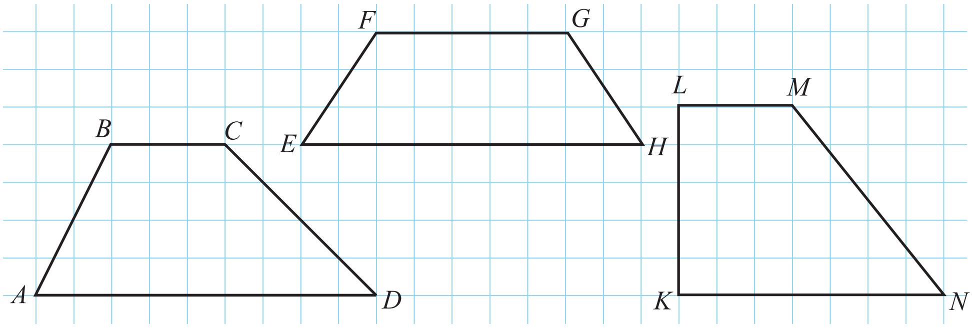
15. Calculați aria triunghiului *ABC* dreptunghic în *B*, dacă $AB=8$ cm, $BC=12$ cm.

16. Aflați coordonatele celui de-al patrulea vârf al paralelogramului *ABCD*, dacă:
a) $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 3)$, $C(7;\ 1)$; b) $A(-7;\ -3)$, $B(5;\ 2)$, $C(17;\ -3)$; c) $A(-5;\ -3)$, $B(5;\ 4)$, $C(9;\ 3)$.

§ 3. Trapezul

1 Examinați desenul.

a) Ce relații există între laturile fiecărui patrulater?
Dar între unghiurile lui?



Definiții

- Patrulaterul cu două laturi paralele şi celelalte două laturi neparalele se numeşte **trapez**. Laturile paralele se numesc **baze**, iar celelalte două se numesc **laturi laterale**.
- Trapezul cu laturile neparalele congruente se numeşte **trapez isoscel**.
- Trapezul cu una din laturile neparalele perpendiculară pe baze se numeşte **trapez dreptunghic**.
- Segmentul cu extremitățile pe dreptele-suport ale bazelor trapezului şi perpendicular pe ele se numeşte **înălțime a trapezului**.

• Cercetați patrulaterele de mai sus şi completați:

a) *ABCD* este ▭ .

b) Patrulaterul ▭ este un trapez dreptunghic.

c) Patrulaterul ▭ este un trapez isoscel.

d) Diagonalele trapezului ▭ sunt congruente.

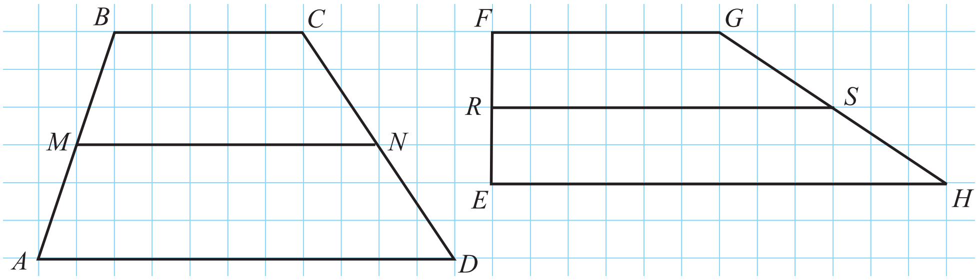
e) Trapezul ▭ are două perechi de unghiuri congruente.

Teorema 1 Diagonalele trapezului isoscel sunt congruente.

Teorema 2 Unghiurile alăturate fiecărei baze a trapezului isoscel sunt congruente.

• Demonstrați teoremele 1 şi 2.

2 Examinați desenul.



- Completați:

a) Punctele M, N, R, S sunt mijloacele segmentelor respectiv.

b) Segmentele $[BC], [MN]$ și $[AD]$ sunt .

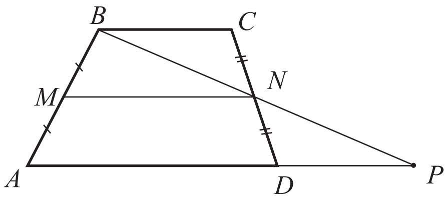
c) Segmentele $[EH], [FG]$ și $[RS]$ sunt .

- Calculați $\frac{AD+BC}{MN}$ și $\frac{EH+FG}{RS}$.

Definiție Segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numește **linia mijlocie a trapezului**.

$[MN]$ și $[RS]$ sunt linii mijlocii ale trapezelor $ABCD$ și, respectiv, $EFGH$.

Teorema 3 Linia mijlocie a trapezului este paralelă cu bazele și are lungimea egală cu semisuma lor.



Să demonstrăm teorema 3.

Ipoteză: $ABCD$ – trapez, $AD \parallel BC$, M și N – mijloacele laturilor $[AB]$ și, respectiv, $[CD]$.

Concluzie: 1) $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$;

2) $MN = \frac{1}{2}(AD+BC)$.

Demonstrație:

① Fie P punctul de intersecție a dreptelor BN și AD.

② $\Delta BCN \equiv \Delta PDN$ (Criteriul ULU: $[CN] \equiv [DN]$,
$\angle BNC \equiv \angle PND$ – unghiuri opuse la vârf;
$\angle BCN \equiv \angle PDN$ – unghiuri alterne interne).

Prin urmare, $[BC] \equiv [PD]$, N – mijlocul segmentului BP.

③ $[MN]$ – linie mijlocie a triunghiului ABP.

Prin urmare, $MN \parallel AP$ $(*)$, $MN = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}(AD+DP) = \frac{1}{2}(AD+BC)$.

Conform $(*)$, $MN \parallel AD$. Așa cum $AD \parallel BC$, rezultă că $MN \parallel BC$, c.c.t.d. ▶

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Realizați un desen pentru care este adevărată propoziția:
a) Trapezul $ABCD$ are bazele AB și CD.
b) Unghiul C al trapezului $ABCD$ este drept.
c) Trapezul dreptunghic $ABCD$ are o bază de două ori mai mică decât cealaltă bază.
d) Diagonalele trapezului $ABCD$ sunt perpendiculare.
e) Trapezul isoscel $ABCD$ are latura laterală congruentă cu baza mică.

2. Aflați măsurile unghiurilor trapezului dreptunghic $ABCD$ cu baza mare $[AD]$, dacă:
a) $m(\angle A) + m(\angle D) = 160°$;   b) $m(\angle B) + m(\angle D) = 130°$.

3. Aflați măsurile unghiurilor trapezului isoscel $ABCD$ cu baza mare $[AD]$, dacă:

a) $m(\angle A)+m(\angle D)=160°$; b) $m(\angle B)+m(\angle C)=220°$.

4. Calculați lungimea liniei mijlocii a unui trapez cu bazele de:

a) 8 cm şi 4 cm; b) $2\sqrt{7}$ cm şi $6\sqrt{7}$ cm; c) 6,(3) cm şi 9,(3) cm.

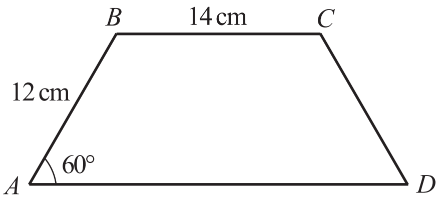
5. $[MN]$ este linia mijlocie a trapezului $ABCD$ cu baza mare $[AD]$. Aflați:

a) AD, dacă $MN=10$ cm şi $BC=6$ cm;

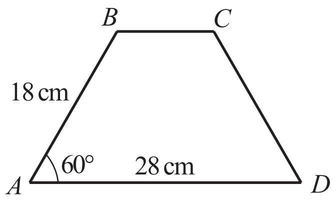
b) BC, dacă $MN=12{,}5$ cm şi $AD=15$ cm.

6. Aflați lungimile laturilor trapezului isoscel cu perimetrul de 100 cm, ştiind că latura laterală este congruentă cu baza mică şi este de două ori mai scurtă decât baza mare.

7. Utilizând datele din desen, aflați perimetrul trapezului isoscel $ABCD$.



a)



b)

8. $[MN]$ este linia mijlocie a trapezului $ABCD$ cu baza mare $[AD]$. Aflați:

a) perimetrul trapezului, dacă $AB=8$ cm, $CD=9$ cm, $MN=12$ cm;

b) MN, dacă $AB=3\sqrt{5}$ cm, $DC=4\sqrt{5}$ cm şi perimetrul trapezului este de $21\sqrt{5}$ cm.

9. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare $[AD]$. Aflați $AC+BD$, dacă $BD=10$ cm.

☐ **2** ☐

10. Diagonala unui trapez împarte linia mijlocie a acestuia în două segmente. Raportul lungimilor acestor segmente este de $\frac{2}{3}$. Aflați lungimile bazelor trapezelor, dacă lungimea liniei mijlocii este de 15 cm.

11. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare $[AD]$. Calculați perimetrul trapezului, dacă $AD=18$ cm, $BC=11$ cm şi $[AC$ este bisectoarea unghiului BAD.

12. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare $[AD]$. Aflați măsurile unghiurilor trapezului, dacă $AD=2BC$ şi $[AC$ este bisectoarea unghiului BAD.

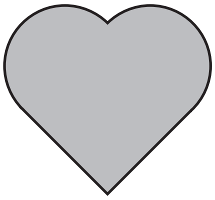
☐ ☐ **3**

13. Punctul E aparține bazei mari $[AB]$ a trapezului $ABCD$, astfel încât $[AE]\equiv[DC]$. Demonstrați că punctul de intersecție a segmentelor AC şi DE este mijlocul fiecăruia dintre segmente.

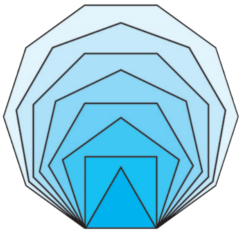
14. Fie $[MN]$ linia mijlocie a trapezului $ABCD$ cu baza mare $[AD]$. Aflați MN, dacă:
$MN+AD=31$ cm, $MN+BC=25$ cm.

15. ***Matematică pentru artă***

„Inimioara” din imagine este formată din reuniunea a două semidiscuri şi a unui pătrat (cu interiorul lui). Diagonala pătratului este de 16 cm. Aflați aria suprafeței „inimioarei”.



§ 4. Poligoane regulate



1 Cercetați cum sunt unghiurile şi laturile unui:

a) triunghi echilateral; b) pătrat.

Rezolvare:

a) Unghiurile unui triunghi echilateral sunt congruente.
Laturile triunghiului echilateral sunt congruente.

b) Unghiurile pătratului sunt congruente. Laturile pătratului sunt congruente.

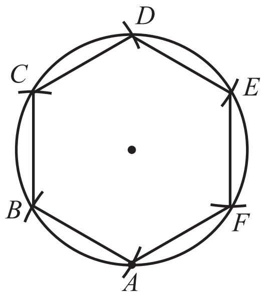
Rețineți

> Un poligon convex cu laturile congruente şi unghiurile congruente se numeşte **poligon regulat**. Latura poligonului regulat cu n laturi se notează prin l_n.

2 Cum construim un hexagon regulat cu latura de lungimea a?

Explicăm

Construim un cerc cu raza a. Păstrăm deschiderea compasului (adică egală cu a), apoi fixăm acul compasului pe cerc, de exemplu, în punctul A şi notăm consecutiv pe cerc (cu compasul) punctele B, C, D, E, F (ca în desen). Obținem hexagonul regulat $ABCDE$ cu latura de lungimea a (adică congruentă cu raza cercului).



- Demonstrați că dacă unim punctele A, C, E din desen, obținem un triunghi echilateral.

3 Care este măsura unghiului unui poligon regulat cu n laturi?

Rezolvare:

Cunoaştem că măsura unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este egală cu $180°(n-2)$.

Poligonul regulat este poligon convex cu toate unghiurile congruete. Prin urmare, măsura unghiului unui poligon regulat cu n laturi este egală cu $\frac{180°(n-2)}{n}$.

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Cum se numeşte poligonul regulat cu:
   a) 3 laturi; b) 4 laturi; c) 5 laturi?

2. Copiați şi completați:
   a) Dacă un poligon ... are n laturi congruente şi ..., atunci el se numeşte poligon regulat cu n laturi.
   b) Poligonul regulat cu ... diagonale din acelaşi vârf are 24 de laturi.
   c) Poligonul regulat cu suma unghiurilor $1800°$ are ... laturi.

3. Aflați măsura unghiului ABC al poligonului regulat:
   a) $ABCDEFG$;
   b) $ABCDEFGHI$;
   c) $ABCDEFGHIJ$.

4. Aflați perimetrul poligonului regulat cu n laturi de lungimea a dacă:
   a) $n=4,\ a=\frac{3}{20}$ cm; b) $n=5,\ a=2\frac{1}{7}$ cm;
   c) $n=9,\ a=3,(3)$ cm; d) $n=6,\ a=2\sqrt{6}$ cm.

5. Aflați numărul de laturi ale poligonului regulat cu perimetrul P şi latura de lungimea a, unde:
   a) $a=6{,}8$ cm, iar $P=54{,}4$ cm; b) $a=26$ cm, iar $P=1{,}3$ m;
   c) $a=2\frac{5}{6}$ cm, iar $P=17$ cm; d) $a=\sqrt{12}$ m, iar $P=10\sqrt{3}$ cm.

6. Aflați numărul de laturi ale poligonului regulat cu suma măsurilor unghiurilor lui egală cu:
   a) 720°; b) 540°; c) 1620°.

7. Cum se numeşte poligonul regulat care are unghiul de măsura: a) 120°; b) 135°; c) 108°?

☐ 2 ☐

8. Punctul M este egal depărtat de vârfurile unui hexagon regulat cu perimetrul de 66 cm. Aflați AM, unde A este un vârf al acestui poligon.

9. În hexagonul regulat calculați:
a) unghiul dintre o diagonala mică şi una mare cu o extremitate comună;
b) unghiul dintre două diagonale mici cu o extremitate comună;
c) raportul dintre diagonala mică şi cea mare;
d) raportul dintre aria hexagonului şi aria triunghiului ale cărui laturi sunt diagonale mici.

10. Demonstrați că toate diagonalele pentagonului regulat sunt congruente.

☐ ☐ 3

11. Demonstrați că fiecare diagonală a pentagonului regulat este paralelă cu una dintre laturile pentagonului.

12. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$. Demonstrați că AF şi BE sunt paralele.

Exerciții și probleme recapitulative

1 ☐ ☐

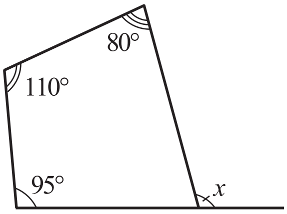
1. Desenați o linie:
a) curbă deschisă;
b) frântă închisă;
c) poligonală închisă, cu 6 laturi;
d) frântă deschisă, cu 5 laturi.

2. Câte diagonale se pot construi din acelaşi vârf al unui poligon convex cu:
a) 8 laturi; b) 9 laturi; c) 12 laturi; d) 18 laturi?

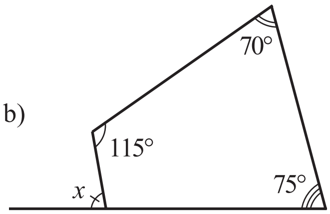
3. Câte laturi are poligonul convex dacă suma măsurilor unghiurilor lui este egală cu:
a) 1260°; b) 1800°;
c) 3240°; d) 2700°?

4. Calculați măsura unghiului notată cu x.

a)



b)

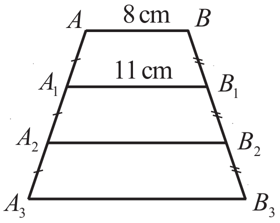


5. Construiți:
a) un paralelogram cu diagonalele de 6 cm şi 8 cm şi unghiul format de ele de 40°;
b) un pătrat cu diagonala de 7 cm;
c) un romb cu diagonalele de 8 cm şi 10 cm;
d) un dreptunghi cu o latură de 5 cm, care formează cu diagonala un unghi de 50°.

6. Construiți:
a) un pătrat cu perimetrul de 20 cm;
b) un romb cu latura de 6 cm şi un unghi de 60°;
c) un trapez dreptunghic cu înălțimea de 5 cm şi bazele de 4 cm şi 6 cm;
d) un trapez isoscel cu înălțimea de 5 cm şi bazele de 3 cm şi 7 cm.

7. Vârfurile patrulaterului $MNKP$ sunt mijloacele laturilor pătratului $ABCD$, iar vârfurile patrulaterului $VXYZ$ – mijloacele laturilor patrulaterului $MNKP$. Calculați:
a) XY, dacă $AB = 8\sqrt{2}$ cm;
b) aria pătratului $ABCD$, dacă $XY = 2\sqrt{5}$ cm.

8. Utilizând datele din desen, aflați lungimile segmentelor A_2B_2 şi A_3B_3, dacă $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$.



☐ 2 ☐

9. Diagonalele paralelogramului $ABCD$ se intersectează în centrul unui sistem de axe ortogonale. Aflați coordonatele:
a) punctelor A şi B, dacă $C(4; 6)$, $D(3; -2)$;
b) punctelor C şi D, dacă $A(1; 1)$, $B(5; -1)$.

10. Fie $ABCD$ un paralelogram, $M \in [AD]$, astfel încât $BM \perp AD$. Aflați aria paralelogramului, dacă $BM = 8$ cm, $AD = 12$ cm.
Indicație. Fie $N \in [AD$, astfel încât $CN \perp AD$. Arătați că $\Delta ABM \equiv \Delta DCN$.

☐ ☐ 3

11. Aflați aria unui romb cu diagonalele de 10 cm şi 12 cm.

12. Calculați aria unui trapez isoscel cu:
a) înălțimea de 5 cm, bazele de 6 cm şi 14 cm;
b) înălțimea de 8 cm, bazele de 5 cm şi 7 cm.

13. Calculați suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui:
a) patrulater convex; b) pentagon convex;
c) hexagon convex.

14. Ce tip de patrulater determină bisectoarele unui dreptunghi oarecare?

15. ***Lucrați în grup!*** Proiect *Aplicații ale figurilor geometrice în design*.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta 1

1. Construiți un dreptunghi cu o latură de 6 cm, care formează cu diagonala un unghi de 30°.

2. Câte diagonale se pot construi din acelaşi vârf al unui poligon convex dacă suma unghiurilor lui este egală cu 2700°?

3. Aflați măsurile unghiurilor unui romb, dacă o diagonală formează cu o latură un unghi de 20°.

4. Aflați numărul de laturi ale poligonului regulat cu suma măsurilor unghiurilor lui egală cu 1260°. Ce măsură are un unghi al poligonului?

5. Diagonalele dreptunghiului $ABCD$ se intersectează în centrul unui sistem de axe ortogonale. Aflați coordonatele punctelor A, B, C, dacă vârful D are coordonatele $(-3; 2)$ şi laturile dreptunghiului sunt paralele cu axele de coordonate.

6. Calculați suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu 7 laturi.

7. Aflați lungimea liniei mijlocii şi distanța dintre mijloacele diagonalelor trapezului cu bazele de lungimi 6,8 cm şi 9,6 cm.

Varianta 2

1. Construiți un trapez dreptunghic cu înălțimea de 4 cm şi bazele de 3 cm şi 5 cm.

2. Câte diagonale se pot construi din acelaşi vârf al unui poligon convex dacă suma unghiurilor lui este egală cu 1980°?

3. Aflați măsurile unghiurilor unui romb, dacă o diagonală formează cu o latură un unghi de 70°.

4. Aflați numărul de laturi ale poligonului regulat cu suma măsurilor unghiurilor lui egală cu 1080°. Ce măsură are un unghi al poligonului?

5. Diagonalele dreptunghiului $ABCD$ se intersectează în centrul unui sistem de axe ortogonale. Aflați coordonatele punctelor A, B, C, dacă vârful D are coordonatele $(1; -5)$ şi laturile dreptunghiului sunt paralele cu axele de coordonate.

6. Calculați suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu 8 laturi.

7. Aflați lungimea liniei mijlocii şi distanța dintre mijloacele diagonalelor trapezului cu bazele de lungimi 5,6 cm şi 7,8 cm.

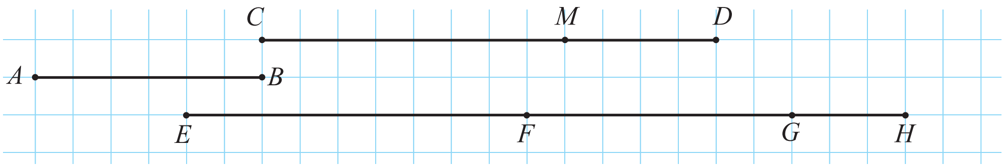
Capitolul 3 Asemănarea triunghiurilor

> *Matematica este știința care trage concluzii necesare.*
> Benjamin Peirce

§1. Teorema lui Thales

1.1. Segmente proporționale

1 Examinați desenul și completați:



a) $\frac{AB}{CD}=\frac{3\,\text{cm}}{6\,\text{cm}}=0{,}5,\quad \frac{CD}{EG}=\square,\quad \frac{EF}{CD}=\square,\quad \frac{GH}{MD}=\square;$

b) $\frac{AB}{CM}=\frac{\square}{CD}=\frac{GH}{\square}=\frac{\square}{EG}.$

- **Raportul a două segmente** este raportul lungimilor lor (măsurate în aceeași unitate de măsură).
- **Segmentele** $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, $[A_3,B_3]$ sunt **proporționale** cu segmentele $[C_1D_1]$, $[C_2D_2]$, $[C_3,D_3]$, dacă $\frac{A_1B_1}{C_1D_1}=\frac{A_2B_2}{C_2D_2}=\frac{A_3B_3}{C_3D_3}=k$, unde $k\in\mathbb{R}_+^*$.
  Numărul k se numește **coeficient de proporționalitate**.
- Similar se definește proporționalitatea între două șiruri a câte 4, 5, ... segmente.

• Găsiți în desenul sarcinii **1** două șiruri a câte 4 segmente proporționale. Cu ce este egal coeficientul de proporționalitate?

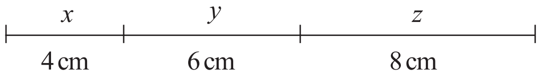
2 Împărțiți un segment de 18 cm în trei părți direct proporționale cu numerele 2, 3, 4.

Rezolvăm Fie x, y, z șirul lungimilor căutate $(x+y+z=18)$.

Atunci, între șirurile x, y, z și 2, 3, 4 există o proporționalitate directă.

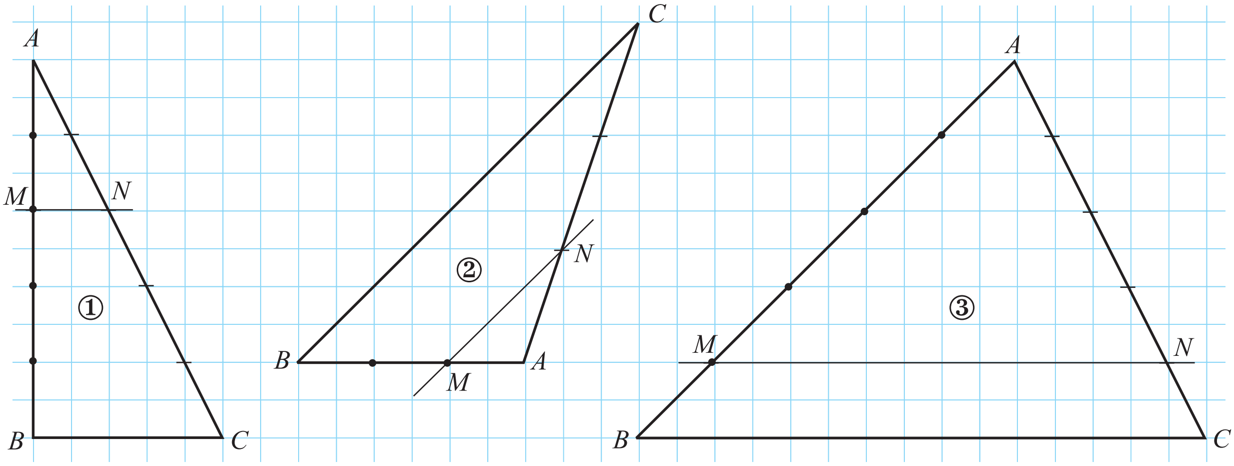
Așadar, $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=\frac{x+y+z}{2+3+4}=\frac{18}{9}=2.$

Obținem: $x=4$ (cm),
$y=6$ (cm),
$z=8$ (cm).



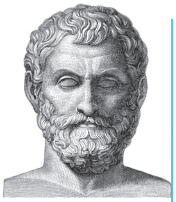
1.2. Teorema lui Thales. Aplicații

1 Examinați desenele și comparați pentru fiecare caz valorile rapoartelor $\frac{AM}{MB}$ și $\frac{AN}{NC}$. Ce observați?



Teorema lui Thales

> O paralelă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi sau pe prelungirile lor segmente proporționale.

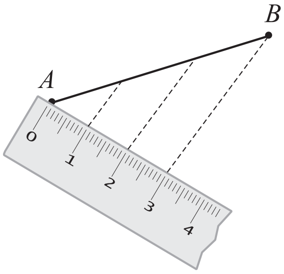


Thales din Milet – filosof grec (624 î.H.–546 î.H.)

- Pentru fiecare caz al sarcinii **1** formați alte rapoarte egale de segmente.

2 Completați pentru a obține reciproca teoremei lui Thales, care, de asemenea, este teoremă: *Dacă o dreaptă care intersectează două laturi ale unui triunghi sau prelungirile lor determină pe ele segmente proporționale, atunci...*

3 Examinați desenul și explicați cu justificări cum poate fi împărțit un segment în 3 părți egale.



- Construiți un segment cu lungimea de $2\frac{1}{7}$ cm.

Teoremă (a paralelelor echidistante)

> Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente și distanțele dintre fiecare două drepte alăturate sunt egale (adică dreptele sunt echidistante).

- Examinați desenul.

Pe rigla transparentă (perpendiculară pe masă) sunt marcate notațiile 0 cm, 1 cm, …, 5 cm. Aflați coeficientul de proporționalitate al rapoartelor dintre lungimile obiectelor și lungimile umbrelor acestora, dacă distanța dintre umbra notației 4 cm și cea a notației 1 cm este egală cu 5 cm.

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐

1. Există o proporționalitate directă între șirurile:

a) 1, 2, 3, 4 și 5, 6, 7, 8;

b) 2, 3, 4, 5 și 4, 6, 8, 10;

c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ și 5, 6, 7;

d) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ și 2,5; 2; 1?

2. Decideți dacă numerele primului rând sunt direct proporționale cu numerele rândului al doilea:

a)

2	4	6	10	12
5	10	15	25	30

b)

1,(3)	0,7	11	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
8	4,2	66	1	0,(3)

3. Completați astfel încât numerele primului rând să fie direct proporționale cu numerele rândului al doilea:

a)

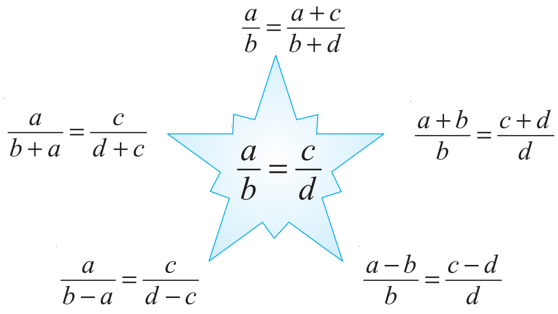
4	6	10	12	
	18			27

b)

0,2		1,8		3,2	
	5	9	10		12

4. Examinați schema și construiți câte 5 proporții, pornind de la proporția:

a) $\frac{2,4}{3,6}=\frac{4}{6}$; b) $\frac{0,8}{0,2}=\frac{10}{2,5}$.



$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$$

$$\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

5. Completați tabelul:

a)

Numărul de cărămizi	Masa (kg)
1	2,5
3	...
5	...
...	100
60	...
...	150

b)

Distanța (km)	Consumul de benzină (*l*)
100	6
150	...
50	...
...	15
350	...
...	28,5

c)

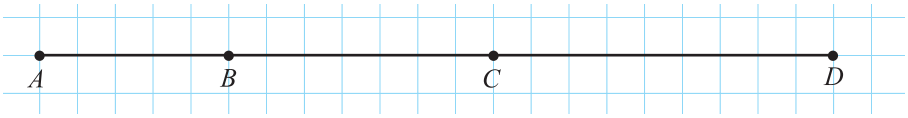
Distanța (km)	Timpul (ore)
60	1
40	...
...	5
90	...
...	4,5
510	...

d)

Consumul de vopsea (*l*)	Aria (m^2)
1	12
...	8
...	14
3,5	...
6	...
...	100

6. Examinați desenul și calculați raportul segmentelor:

a) *AB* și *CD*; b) *AC* și *AD*; c) *BC* și *BD*; d) *AD* și *AB*.



7. Punctul C aparține segmentului AB, astfel încât $\frac{AC}{BC}=\frac{3}{4}$. Calculați raportul:

a) $\frac{AB}{AC}$; b) $\frac{BC}{AB}$; c) $\frac{AB}{AB-AC}$; d) $\frac{AB-BC}{AB+AC}$.

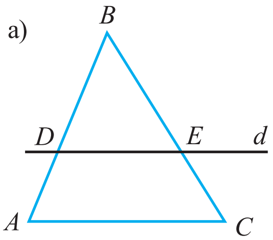
8. Calculați: a) MN, dacă raportul lungimilor segmentelor MN şi KP este egal cu 2,4 şi $KP = 4$ cm;

b) KP, dacă raportul lungimilor segmentelor MN şi KP este egal cu 4,2 şi $MN = 21$ cm;

c) raportul lungimilor segmentelor MN şi KP, dacă $[MN]$ este de 3 ori mai scurt decât $[KP]$.

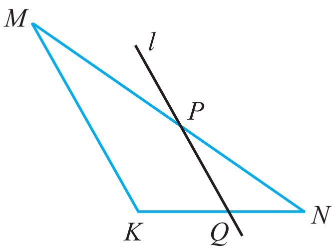
9. Dreapta din desen este paralelă cu o latură a triunghiului. Completați adecvat:

a)



$\frac{BD}{DA}=\frac{\square}{\square}$, $\frac{EC}{BC}=\frac{\square}{\square}$;

b)

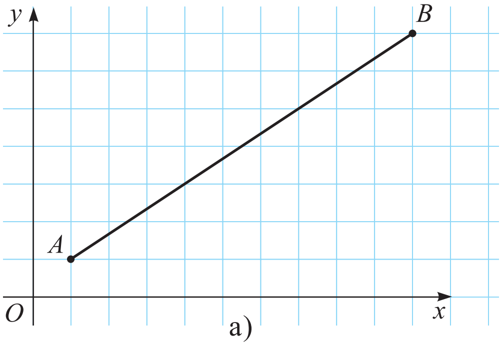


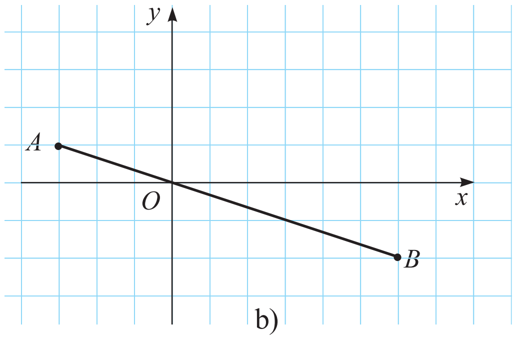
$\frac{MP}{PN}=\frac{\square}{\square}$, $\frac{KN}{QN}=\frac{\square}{\square}$.

10. Împărțiți un segment de 12 cm în 3 segmente proporționale cu numerele 1, 2, 3.

11. Împărțiți un segment de 13,5 cm în 3 segmente proporționale cu numerele 2, 4, 3.

12. Aflați coordonatele a două puncte care împart segmentul AB în 3 segmente consecutive congruente.

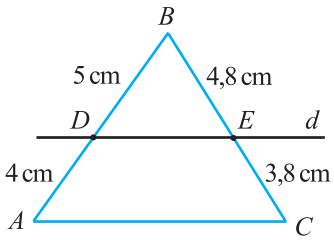




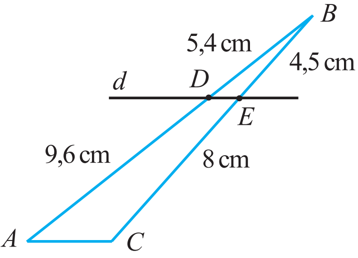
☐ **2** ☐

13. Examinați desenul și stabiliți dacă dreapta d este paralelă cu o latură a triunghiului:

a)

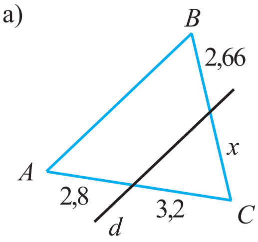


b)

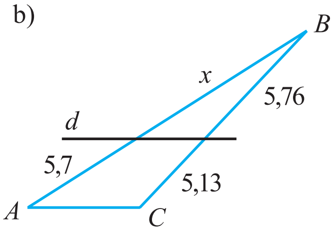


14. Examinați desenul. Dreapta d este paralelă cu o latură a triunghiului. Aflați x.

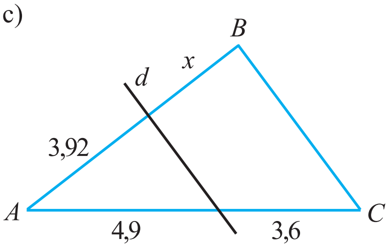
a)



b)



c)

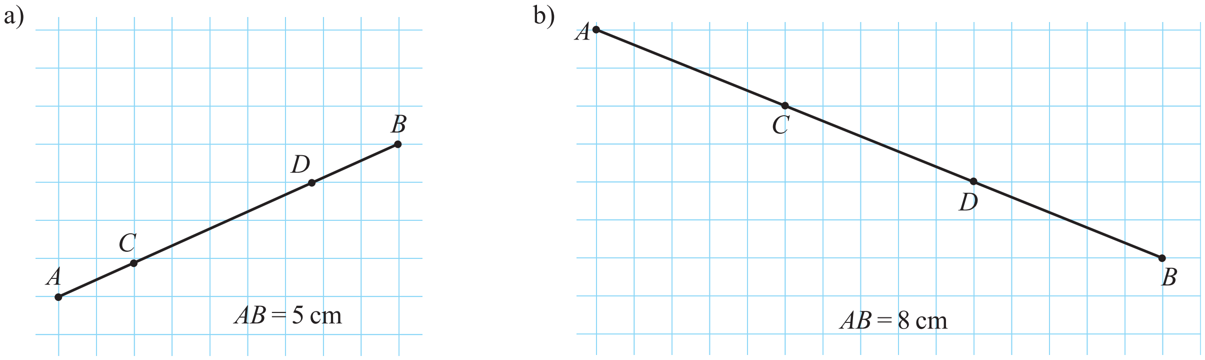


15. Cu rigla negradată se pot construi drepte paralele echidistante. Luând în considerare acest fapt, împărțiți doar cu rigla:

a) un segment de 6 cm în 4 segmente congruente;

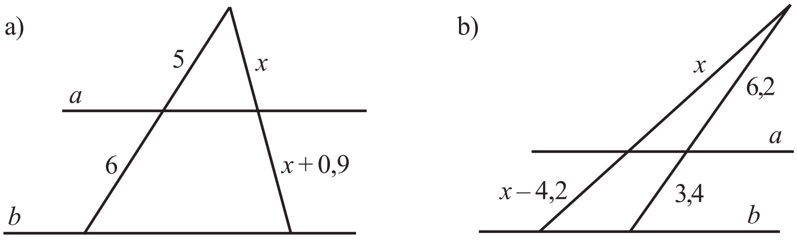
b) un segment de 7 cm în 3 segmente congruente.

16. Punctele A, B, C, D aparțin liniilor orizontale ale rețelei de pătrate. Examinați desenul şi aflați lungimea segmentelor AC, CD şi BD:

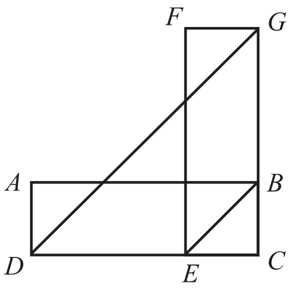


☐ ☐ **3**

17. Dreptele a şi b din desen sunt paralele. Aflați valoarea lui x.



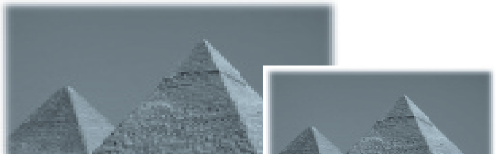
18. Dreptunghiurile $ABCD$ şi $EFGC$ au aceeaşi arie. Demonstrați că $[DG] \parallel [BE]$.



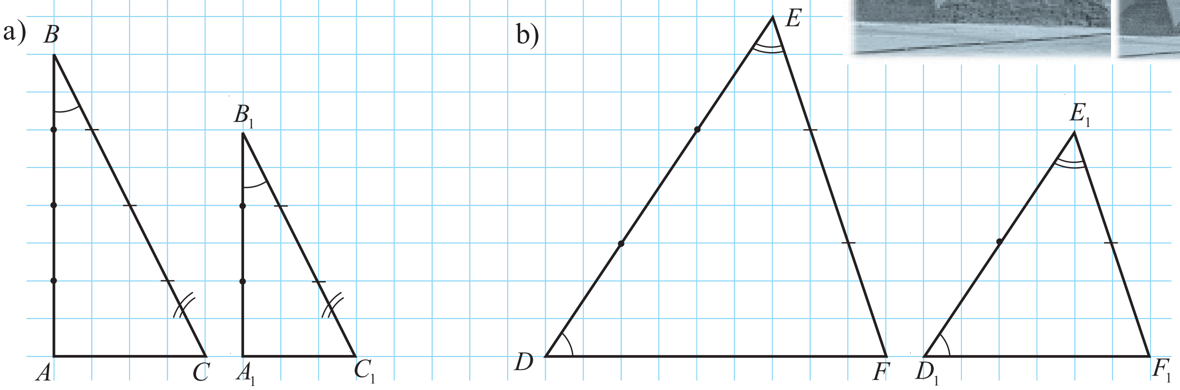
19. ***Matematică pentru sport***

Pinionul roții din spate a bicicletei are 14 „dinți”, iar angrenajul pedalier – 49 de „dinți”. Raza cercului roții din spate este de 35 cm. Ce distanță va parcurge bicicleta dacă angrenajul va fi rotit complet de 10 ori?

§2. Triunghiuri asemenea



1 Examinați desenul şi completați:



a) $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{4}{3}$, $\frac{AC}{A_1C_1}=\boxed{}$, $\frac{BC}{B_1C_1}=\boxed{}$, $\angle A\equiv\angle A_1$, $\angle B\equiv\angle B_1$, $\angle C\equiv\boxed{}$.

b) $\frac{DE}{\boxed{}}=\frac{EF}{E_1F_1}=\frac{\boxed{}}{D_1F_1}=\frac{3}{2}$, $\angle D\equiv\angle D_1$, $\angle E\equiv\boxed{}$, $\boxed{}\equiv\angle F_1$.

- Ce proprietăți comune ale celor două perechi de triunghiuri ați descoperit?

Definiție

Două **triunghiuri** se numesc **asemenea** dacă ele au unghiurile respectiv congruente şi laturile respectiv proporționale.

Notația $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$ se citeşte „Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt asemenea”, ceea ce înseamnă că $\angle A\equiv\angle A_1$, $\angle B\equiv\angle B_1$, $\angle C\equiv\angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=k$.

Numărul k se numeşte ***coeficient de proporționalitate*** (sau ***coeficient de asemănare***). Menționăm că, în genere, din relația $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$ nu rezultă, de exemplu, că $\Delta ABC\sim\Delta A_1C_1B_1$.

- Demonstrați teorema:

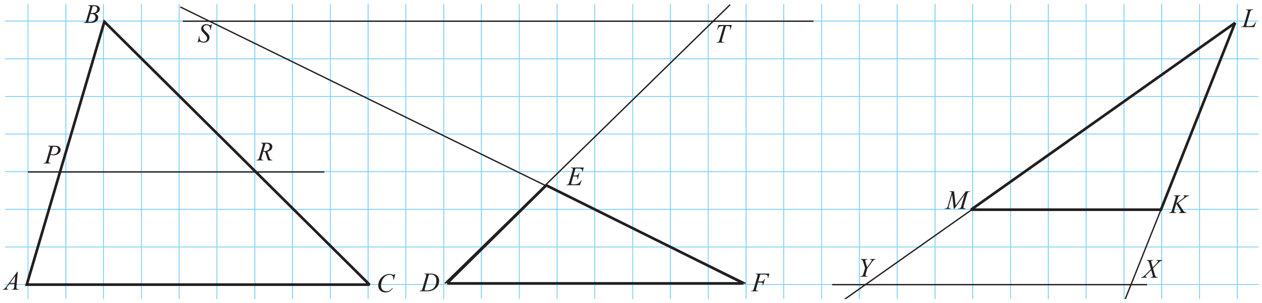
Teoremă (tranzitivitatea asemănării)

Dacă $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$ şi $\Delta A_1B_1C_1\sim\Delta A_2B_2C_2$, atunci $\Delta ABC\sim\Delta A_2B_2C_2$.

Observație

Două triunghiuri congruente sunt asemenea şi au coeficientul de asemănare 1.

2 Examinați desenele. Aplicând teorema lui Thales şi instrumente geometrice, găsiți perechile de triunghiuri asemenea. Formulați o ipoteză referitoare la dreapta care este paralelă cu o latură a unui triunghi.

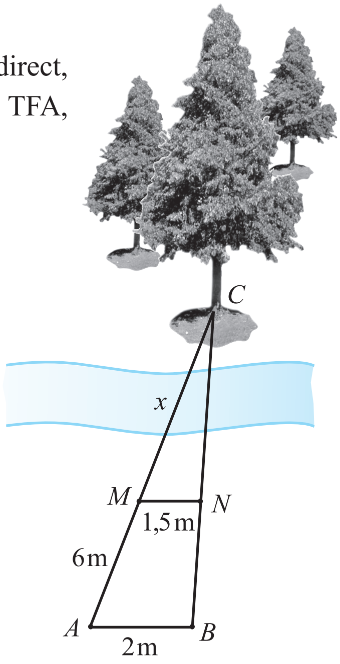


Teorema fundamentală a asemănării (TFA)

O dreaptă paralelă cu una dintre laturile unui triunghi determină cu dreptele-suport ale celorlalte două laturi ale acestuia un triunghi asemenea cu cel dat.

- Examinați desenul ($MN \parallel AB$).

Distanța dintre copac şi punctul M nu poate fi măsurată direct, însă se pot măsura segmentele AM, MN, NB şi AB. Aplicând TFA, aflați MC.



Explicăm

① Deoarece $MN \parallel AB$, conform TFA: $\Delta MCN \sim \Delta ACB$.

② $\frac{MC}{AC}=\frac{MN}{AB}$ (conform ①). Notăm $MC = x$.

$$\frac{x}{x+6}=\frac{1{,}5}{2} \rightarrow 2x=1{,}5(x+6)$$

$$\rightarrow 2x-1{,}5x=9$$

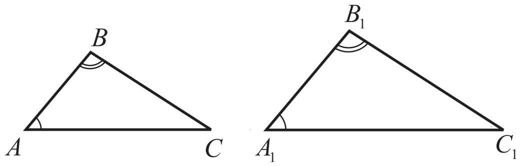
$$\rightarrow 0{,}5x=9$$

Prin urmare, $x = 9 : 0{,}5 =$ ☐ (m).

Răspuns: ☐ m.

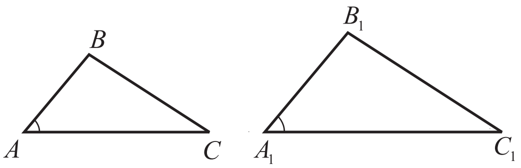
3 Criteriile de asemănare a două triunghiuri

1. **Criteriul UU.** Dacă două unghiuri ale unui triunghi sunt respectiv congruente cu două unghiuri ale altui triunghi, atunci triunghiurile sunt asemenea.



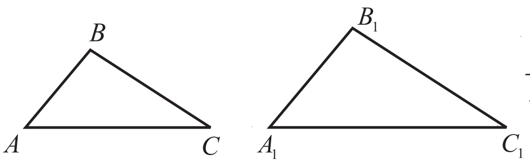
$$\left.\begin{array}{l}\angle A \equiv \angle A_1\\ \angle B \equiv \angle B_1\end{array}\right| \rightarrow \Delta\, ABC \equiv \Delta\, A_1B_1C_1$$

2. **Criteriul LUL.** Dacă două laturi ale unui triunghi sunt respectiv proporționale cu două laturi ale altui triunghi şi unghiurile formate de aceste laturi sunt congruente, atunci triunghiurile sunt asemenea.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}\\ \angle A \equiv \angle A_1\end{array}\right| \rightarrow \Delta\, ABC \equiv \Delta\, A_1B_1C_1$$

3. **Criteriul LLL.** Dacă laturile unui triunghi sunt respectiv proporționale cu laturile altui triunghi, atunci triunghiurile sunt asemenea.



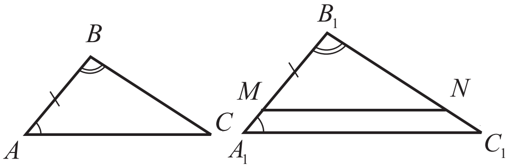
$$\left.\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}\right| \rightarrow \Delta\, ABC \equiv \Delta\, A_1B_1C_1$$

Să demonstrăm criteriul de asemănare UU.

Ipoteză: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A \equiv \angle A_1$, $\angle B \equiv \angle B_1$.

Concluzie: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Demonstrație:



① Construim punctele M şi N, $M \in [A_1B_1]$, $N \in [B_1C_1]$, astfel încât $[MB_1] \equiv [AB]$ şi $MN \parallel A_1C_1$.

② $\angle B_1MN \equiv \angle A_1$ (ca unghiuri corespondente formate de secanta A_1B_1 cu dreptele paralele MN şi A_1C_1). Prin urmare, $\angle B_1MN \equiv \angle A$ (tranzitivitatea congruenței).

③ $\Delta ABC \equiv \Delta MB_1N$ (Criteriul ULU), deci, $\Delta ABC \sim \Delta MB_1N$ (conform observației, p. 175).

④ $\Delta MB_1N \sim \Delta A_1B_1C$ (Conform teoremei fundamentale a asemănării, deoarece $MN \parallel A_1C_1$).

⑤ Din ③ şi ④ rezultă că $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (conform tranzitivității asemănării),

c.c.t.d. ►

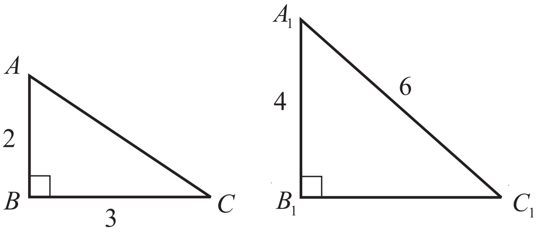
4 Aşa cum orice triunghi dreptunghic are un unghi drept, rezultă că două triunghiuri dreptunghice sunt asemenea dacă au două perechi de laturi omoloage respectiv proporționale sau o pereche de unghiuri ascuțite omoloage congruente.

Criteriile de asemănare a două triunghiuri dreptunghice

1. **Criteriul U.** Dacă un unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic este congruent cu un unghi ascuțit al altui triunghi dreptunghic, atunci aceste triunghiuri sunt asemenea.

2. **Criteriul CC.** Dacă cele două catete ale unui triunghi dreptunghic sunt respectiv proporționale cu două catete ale altui triunghi dreptunghic, atunci aceste triunghiuri sunt asemenea.

3. **Criteriul CI.** Dacă ipotenuza şi o catetă ale unui triunghi dreptunghic sunt respectiv proporționale cu ipotenuza şi o catetă ale altui triunghi dreptunghic, atunci aceste triunghiuri sunt asemenea.



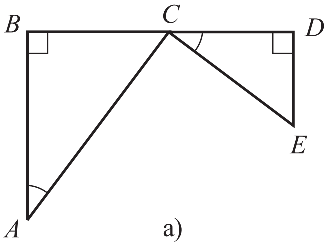
• Examinați desenul şi determinați valoarea de adevăr a propoziției: „Dacă două laturi ale unui triunghi dreptunghic sunt respectiv proporționale cu două laturi ale altui triunghi dreptunghic, atunci aceste triunghiuri sunt asemenea”.

Exerciții şi probleme

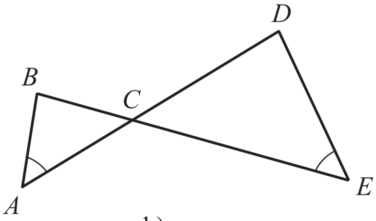
1 ☐ ☐

1. Scrieți relațiile de congruență şi cele de egalitate referitoare la elementele triunghiurilor care rezultă din relația:
   a) $\Delta TRI \sim \Delta OPT$; b) $\Delta POC \sim \Delta SAT$.

2. Examinați desenul şi recunoaşteți triunghiurile asemenea:



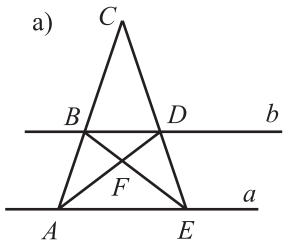
a)



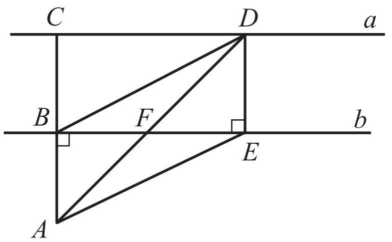
b)

3. Dreptele a şi b sunt paralele. Stabiliţi care triunghiuri sunt asemenea.

a)



b)



4. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC, dacă:

a) $m(\angle B) = 90°$, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ şi $m(\angle F) = 35°$;

b) $\angle A \equiv \angle B$, $\Delta ABC \sim \Delta MNK$ şi $m(\angle K) = 40°$;

c) $\angle A \equiv \angle B$, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ şi $\angle D \equiv \angle F$.

5. *Adevărat* sau *Fals*?

a) Triunghiurile dreptunghice isoscele sunt asemenea.

b) Dacă $\Delta ABC \sim \Delta BAC$, atunci ΔCBA este echilateral.

c) Dacă $\Delta ABC \sim \Delta CBA$ şi $m(\angle A) = 60°$, atunci ΔABC este echilateral.

6. Triunghiurile ABC şi DEF sunt asemenea. Aflaţi:

a) perimetrul triunghiului ABC, dacă perimetrul triunghiului DEF este egal cu 22 cm şi $\frac{AB}{DE} = 1{,}5$;

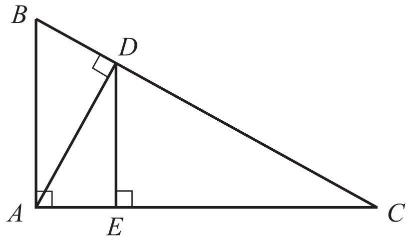
b) coeficientul de proporţionalitate, dacă perimetrul triunghiului ABC este de $\sqrt{5}$ ori mai mare decât al triunghiului DEF.

7. Diagonalele trapezului $ABCD$ cu baza mare AD se intersectează în punctul O. Scrieţi perechile de triunghiuri asemenea formate.

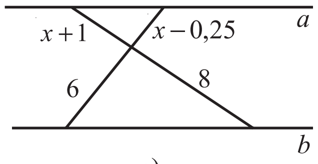
8. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ şi $[BM]$, $[EN]$ sunt înălţimile triunghiurilor ABC şi DEF, $M \in AC$, $N \in DF$. Aflaţi alte triunghiuri asemenea.

☐ 2 ☐

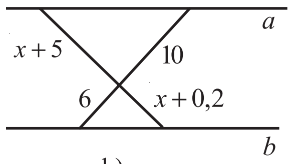
9. Examinaţi desenul şi recunoaşteţi triunghiurile asemenea.



10. Dreptele a şi b sunt paralele. Aflaţi x.



a)

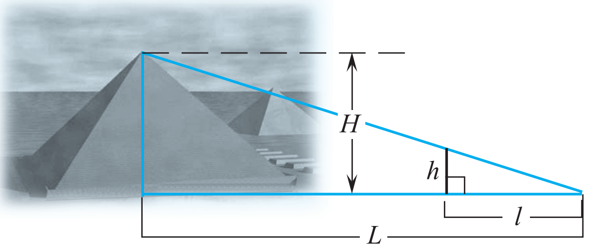


b)

11. Examinaţi desenul. Aflaţi înălţimea (H) a piramidei, dacă L este lungimea umbrei piramidei, h – lungimea băţului, iar l – lungimea umbrei băţului şi:

a) $L = 90$ m, $h = 1{,}5$ m, $l = 2$ m;

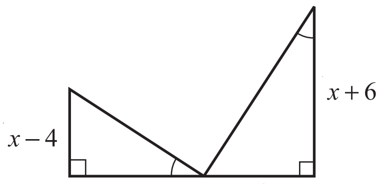
b) $L = 120$ m, $h = 1{,}2$ m, $l = 1{,}8$ m.



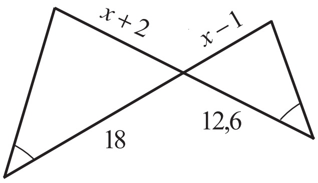
12. Aflaţi lungimile laturilor unui triunghi cu perimetrul de 52 cm, dacă el este asemenea cu un triunghi cu laturile de 15 cm, 20 cm şi 30 cm.

☐ ☐ 3

13. Examinaţi desenul şi aflaţi x:



a)



b)

14. Punctele A, B, C, D, E, F aparţin unui cerc. Care două triunghiuri cu vârfurile în cele 6 puncte sunt asemenea, dacă:

a) $\frac{AF}{CD} = \frac{FE}{DB} = \frac{AE}{CB}$;

b) $\angle DFE \equiv \angle ABC$, $\angle DEF \equiv \angle BCA$;

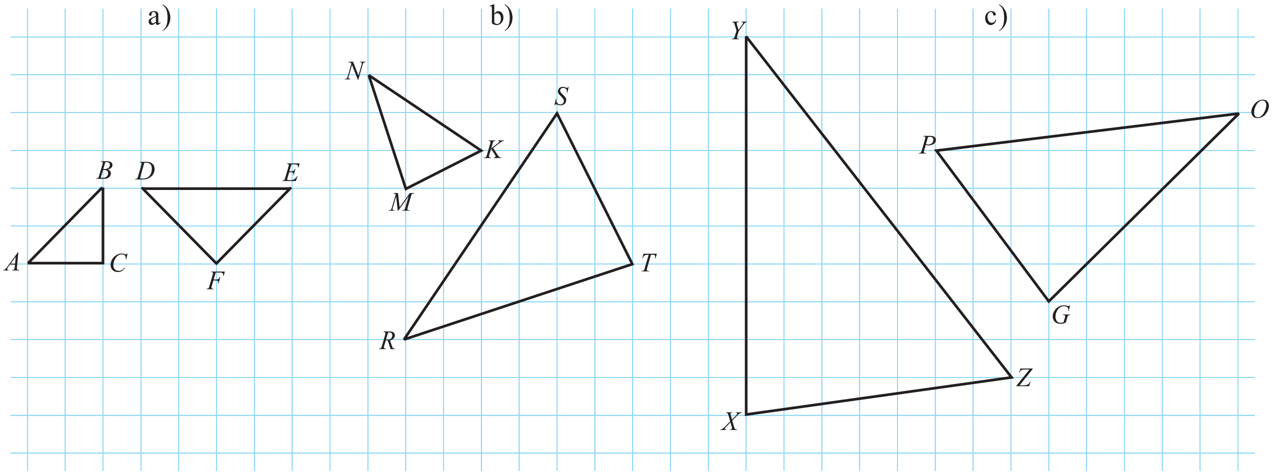
c) $\frac{DE}{DA} = \frac{CF}{CB}$ şi $\angle ADE \equiv \angle BCF$?

Exerciții și probleme recapitulative

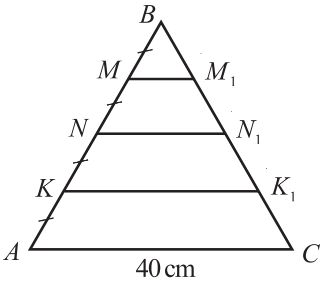
1 ☐ ☐

1. Scrieți relațiile care rezultă din relația: a) $\Delta SAT \sim \Delta ROC$;
b) $\Delta LMN \sim \Delta FED$.

2. Examinați desenul şi arătați că triunghiurile sunt asemenea.



3. Examinați desenul. $MM_1 \parallel NN_1 \parallel KK_1 \parallel AC$.
Aflați MM_1, NN_1, KK_1.



4. Prin mijlocul laturii mai mari a unui triunghi trece o dreaptă care „taie” din triunghiul dat un triunghi asemenea cu cel dat. Aflați lungimea laturii mai mici a triunghiului format, dacă laturile triunghiului dat au lungimile egale cu:
a) 8 cm, 9 cm, 10 cm; b) 12 cm, 15 cm, 18 cm.

5. Fie triunghiul ABC cu $AB = 12$ cm, $AC = 6$ cm. Se construieşte segmentul MK, unde $M \in [AB]$, $K \in [AC]$, astfel încât $AM = 4$ cm, $AK = 2$ cm. Arătați că triunghiul format de punctele A, M, K este asemenea cu triunghiul ABC şi aflați coeficientul de proporționalitate.

6. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 74°$ şi $m(\angle B) = 76°$. Se construieşte segmentul AK, unde $K \in [BC]$, astfel încât triunghiul format de punctele A, B, K este asemenea cu triunghiul ABC. Aflați $m(\angle BAK)$ şi $m(\angle AKB)$.

7. Punctul de intersecție a diagonalelor unui trapez împarte o diagonală în două segmente cu lungimile de 4 cm şi 6 cm. Aflați lungimea bazei mari, dacă lungimea bazei mici este de 10 cm.

8. Punctul M aparține laturii AC a triunghiului ABC, astfel încât $\angle ACB \equiv \angle ABM$. Aflați AB, dacă $AM = 5$ cm, $MC = 15$ cm.

☐ **2** ☐

9. Din 6 segmente cu lungimile de 8 cm, 12 cm, 16 cm, 18 cm, 24 cm şi 36 cm au fost formate două triunghiuri asemenea. Aflați coeficientul de proporționalitate a acestor triunghiuri.

10. Fie triunghiul ABC. Demonstrați că triunghiul ale cărui vârfuri sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC este asemenea cu triunghiul ABC.

11. Fie triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$, astfel încât $\angle B \equiv \angle B_1$, $\angle C \equiv \angle C_1$ şi $\frac{AB}{A_1B_1} = 3$. Aflaţi lungimea medianei A_1M_1, dacă lungimea medianei AM este egală cu 12 cm.

12. Două triunghiuri asemenea necongruente au două perechi de laturi congruente cu lungimile egale cu 6 cm şi 9 cm. Aflaţi lungimile celorlalte laturi ale triunghiurilor.

13. O diagonală a unui trapez împarte trapezul în două triunghiuri asemenea. De câte ori baza mare este mai lungă decât baza mică, dacă o latură laterală a trapezului este de 3 ori mai lungă decât cealaltă latură laterală?

14. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 40°$. Bisectoarea unghiului A împarte triunghiul ABC în două triunghiuri, astfel încât unul din ele este asemenea cu triunghiul ABC. Aflaţi măsura celui mai mare unghi al triunghiului ABC.

☐ ☐ **3**

15. Fie $[AA_1]$ şi $[BB_1]$ înălţimile triunghiului ABC. Demonstraţi că triunghiul cu vârfurile în punctele A_1, B_1 şi C este asemenea cu triunghiul ABC.

16. ***Lucraţi în grup!*** Proiect *Aplicaţii ale triunghiurilor asemenea în construcţii.*

Test sumativ

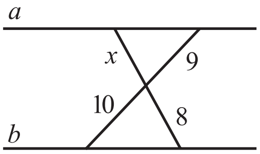
Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta 1

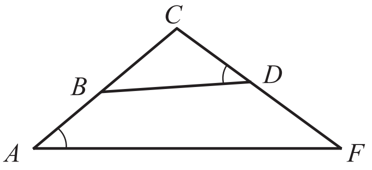
1. Scieţi relaţiile care rezultă din relaţia:

$$\Delta PRO \sim \Delta EVA.$$

2. Examinaţi desenul şi aflaţi valoarea lui x $(a \parallel b)$.



3. Examinaţi desenul şi aflaţi două triunghiuri asemenea. Argumentaţi.



4. Împărţiţi segmentul AB de 18 cm în părţi proporţionale cu numerele 2, 2, 5.

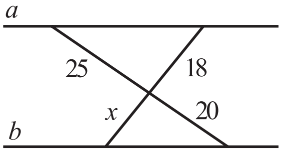
5. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 42$ cm, $E \in [BC]$, astfel încât $\frac{BE}{BC} = \frac{5}{7}$. Dreapta DE intersectează dreapta AB în punctul F. Aflaţi BF.

Varianta 2

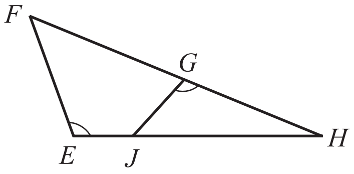
1. Scieţi relaţiile care rezultă din relaţia:

$$\Delta CON \sim \Delta RAS.$$

2. Examinaţi desenul şi aflaţi valoarea lui x $(a \parallel b)$.



3. Examinaţi desenul şi aflaţi două triunghiuri asemenea. Argumentaţi.



4. Împărţiţi segmentul MN de 15 cm în părţi proporţionale cu numerele 3, 3, 4.

5. Fie pătratul $ABCD$ cu latura de 10 cm. Punctul E aparţine laturii CD, astfel încât $\frac{CE}{ED} = 0{,}5$. Aflaţi distanţa dintre punctul C şi dreapta AE.

Capitolul 4 Relații metrice în triunghiul dreptunghic

> *Matematicii îi aparține fantezia, imaginația și demonstrația.*
> Grigore Moisil

§1. Teorema înălțimii. Teorema catetei

1 Examinați desenul și completați tabelul.

Proiecția ortogonală a unei figuri pe o dreaptă este mulțimea proiecțiilor ortogonale ale punctelor acestei figuri pe dreaptă.

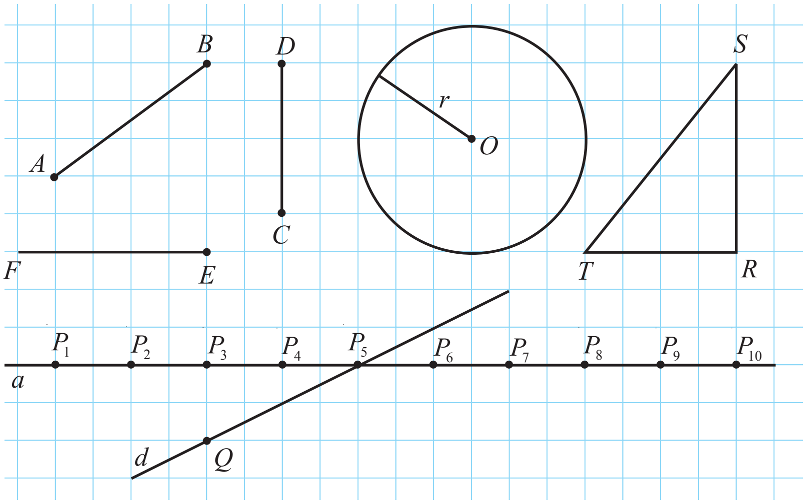
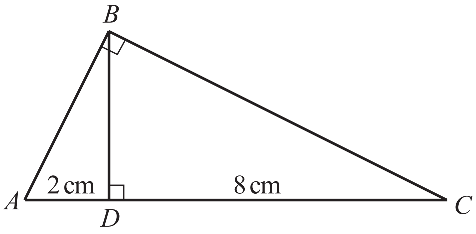


Figura geometrică	$[AB]$	$[CD]$	$\mathscr{C}(O,r)$	ΔSTR	$[EF$	d	P_8	$[QP_5]$
Proiecția ortogonală a figurii pe dreapta *a*	$[P_1P_3]$							

Observație În continuare, prin proiecția unei figuri pe o dreaptă vom înțelege proiecția ortogonală a acestei figuri pe dreaptă.

2 Examinați desenul și calculați BD.



Explicăm ① Cercetăm triunghiurile ADB și BDC:

$\angle ADB \equiv \angle BDC$ (unghiuri drepte),

$\angle ABD \equiv \angle BCD$ (au același complement, $\angle CBD$).

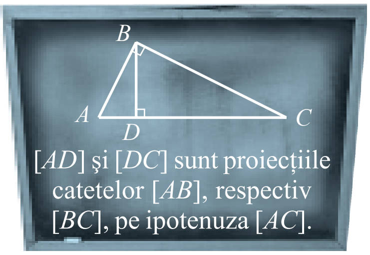
Prin urmare, $\Delta ABD \sim \Delta BCD$ (Criteriul UU). (∗)

② Din (∗) rezultă că $\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{\square}$ sau

$BD^2=\square\cdot\square$.

$BD=\sqrt{\square}=\square$ (cm).

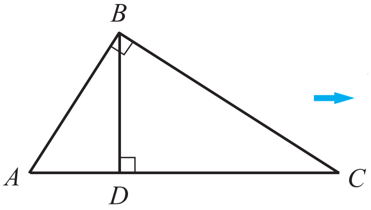
Răspuns: $\square$ cm.



[*AD*] şi [*DC*] sunt proiecțiile catetelor [*AB*], respectiv [*BC*], pe ipotenuza [*AC*].

Teorema înălțimii

Pătratul lungimii înălțimii unui triunghi dreptunghic corespunzătoare ipotenuzei este egal cu produsul lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.



→ $BD^2=AD\cdot DC$

Rezolvarea problemei **2** sugerează de fapt demonstrația teoremei înălțimii. Să demonstrăm totuşi această teoremă.

Ipoteză: ΔABC, $m(\angle B)=90°$, $D\in[AC]$, $BD\perp AC$.

Concluzie: $BD^2=AD\cdot DC$.

Demonstrație:

① $\angle ADB\equiv\angle BDC$ (unghiuri drepte).

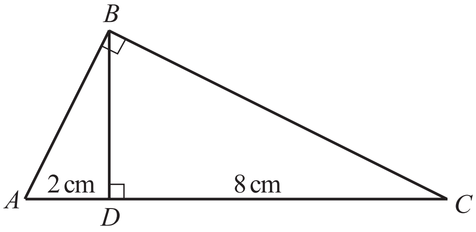
② $\angle ABD\equiv\angle BCD$ (au acelaşi complement, $\angle CBD$).

③ $\Delta ABD\sim\Delta BCD$ (din ① şi ②, criteriul UU sau criteriul U).

④ Din ③ rezultă că $\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{CD}$ sau $BD^2=AD\cdot CD$. c.c.t.d. ►

• Numărul $\sqrt{ab}$ se numeşte ***media geometrică*** (sau ***media proporțională***) a numerelor reale pozitive *a* şi *b*. Utilizând această noțiune, găsiți o altă formulare a enunțului teoremei înălțimii.

3 Examinați desenul şi calculați *AB*.



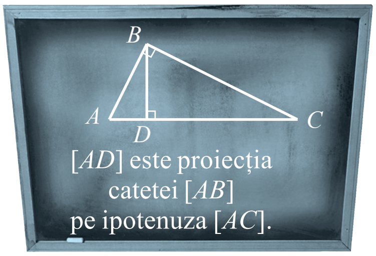
Explicăm

① Cercetăm triunghiurile *ABC* şi *ADB*:

$\angle ABC\equiv\angle ADB$ (unghiuri drepte),

$\angle ACB\equiv\angle ABD$ (au acelaşi complement, $\angle A$).

Prin urmare, $\Delta ABC\sim\Delta ADB$ (Criteriul UU). (∗)



[*AD*] este proiecția catetei [*AB*] pe ipotenuza [*AC*].

② Din (∗) rezultă că $\frac{AB}{AD}=\frac{\square}{AB}$ sau

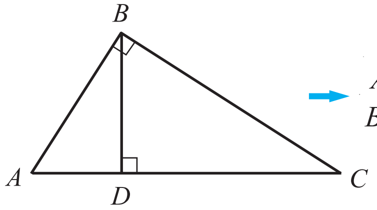
$AB^2=\square\cdot\square$.

$AB=\sqrt{\square}=\square$ (cm).

Răspuns: $\square$ cm.

Teorema catetei

Pătratul lungimii catetei unui triunghi dreptunghic este egal cu produsul dintre lungimea ipotenuzei şi lungimea proiecției acestei catete pe ipotenuză.



→ $AB^2 = AD \cdot AC$
$BC^2 = CD \cdot AC$

Observație Rezolvarea problemei **3** sugerează de fapt demonstrația teoremei catetei.

- Demonstrați teorema catetei.
- Utilizând noțiunea de medie geometrică, găsiți o altă formulare a enunțului teoremei catetei.
- Calculați lungimea catetei BC.

Exerciții şi probleme

1 ☐ ☐

1. Examinați desenul şi completați tabelul.

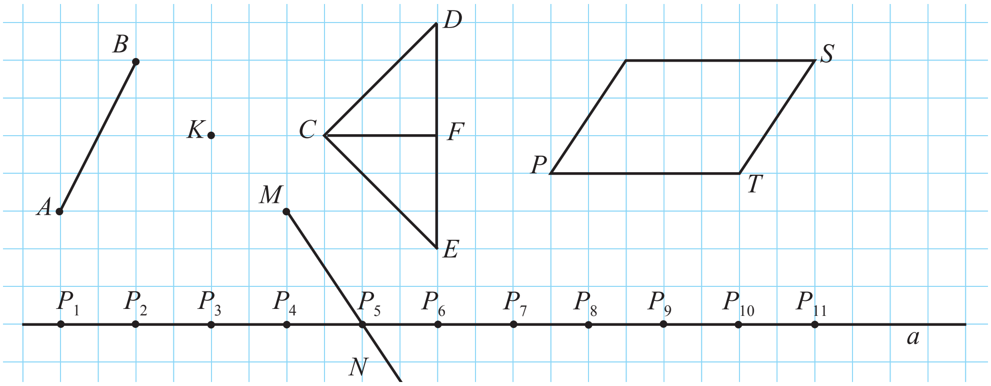
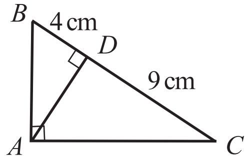


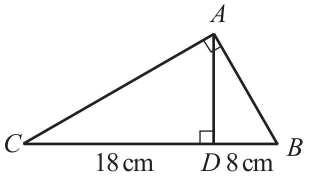
Figura geometrică	$[AB]$	K	ΔCDE	$[MN$	ΔCFE	$[P_5P_9]$	$PRST$	S
Proiecția ortogonală a figurii pe dreapta a								

2. Examinați desenul şi calculați AD:

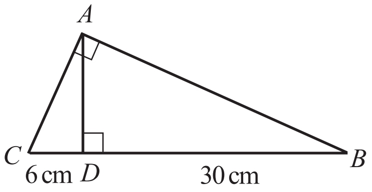
a)



b)

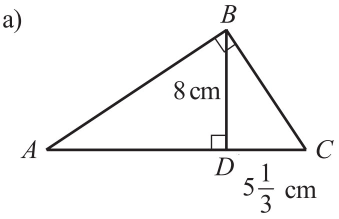


c)

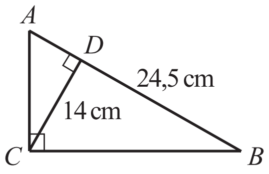


3. Examinați desenul şi calculați AD:

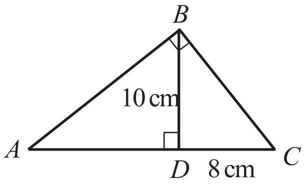
a)



b)



c)



4. Aflați lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic, dacă înălțimea triunghiului dusă din vârful unghiului drept împarte ipotenuza în două segmente cu lungimile de:

a) 6 cm şi 24 cm;
b) 12 cm şi 16 cm;
c) 8 cm şi 10 cm;
d) $\sqrt{3}$ cm şi $2\sqrt{3}$ cm.

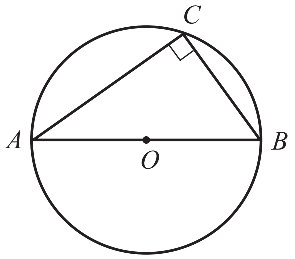
☐ **2** ☐

5. Raportul lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este egal cu $\frac{5}{6}$, iar lungimea ipotenuzei este de 122 cm. Aflați lungimile segmentelor în care înălțimea dusă din vârful unghiului drept împarte ipotenuza.

6. Raportul lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este egal cu $\frac{3}{7}$, iar înălțimea dusă din vârful unghiului drept are lungimea de 42 cm. Aflați lungimile segmentelor în care această înălțime împarte ipotenuza.

7. Luând în considerare că dacă $[AB]$ este un diametru al unui cerc, iar C este un punct al cercului, atunci $m(\angle C) = 90°$, construiți doar cu rigla şi compasul pe rețeaua caietului de matematică un segment cu lungimea de:

a) $\sqrt{15}$ cm;
b) $\sqrt{24}$ cm;
c) $3\sqrt{4}$ cm.

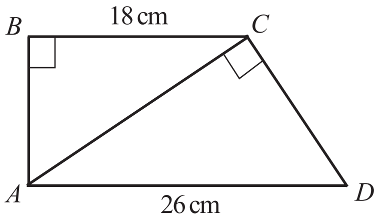


8. Fie trapezul $ABCD$ cu baza mare $[AD]$.
Aflați CD, dacă $BC \perp CD$, $BD \perp AB$, $[AB] \equiv [BC]$ şi $AD = 10$ cm.

9. Demonstrați că în orice triunghi dreptunghic lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză sunt proporționale cu pătratele lungimilor catetelor.

10. Triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu ipotenuza $[AC]$.
Aflați lungimile catetelor, dacă $AC = 10$ cm.

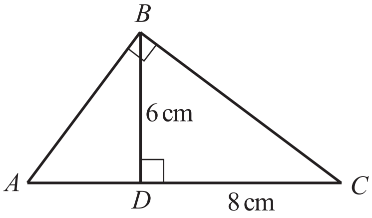
11. Examinați desenul şi aflați lungimea înălțimii trapezului $ABCD$.



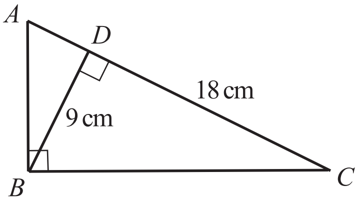
12. Raportul dintre lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuza unui triunghi dreptunghic este egal cu 0,25. Aflați lungimea înălțimii duse din vârful unghiului drept, dacă lungimea ipotenuzei este egală cu 20 cm.

13. Examinați desenul şi aflați AD.

a)



b)



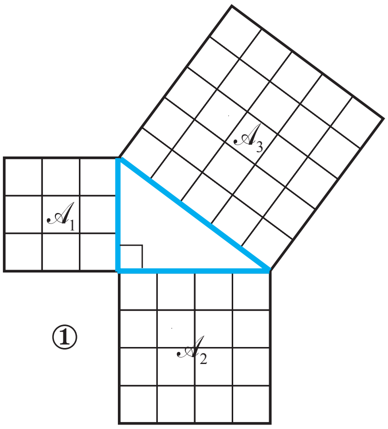
☐ ☐ **3**

14. Lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egală cu 30 cm, iar lungimea proiecției unei catete pe ipotenuză reprezintă 80% din lungimea ipotenuzei. Aflați lungimile catetelor.

15. Punctul M este mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC şi triunghiul ABM este echilateral. Demonstrați că punctul A este proiecția punctului C pe AB.

§2. Teorema lui Pitagora. Aplicații

1 Examinați desenele și completați tabelul. Comparați valorile ultimelor două coloane.



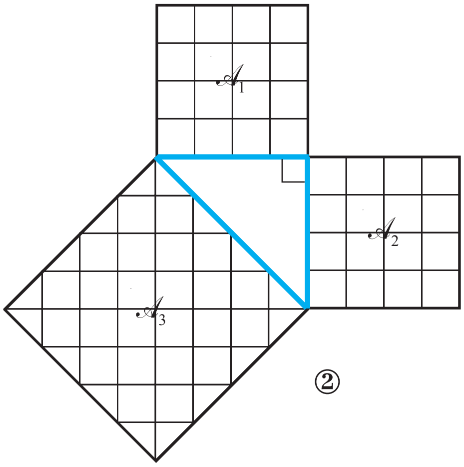
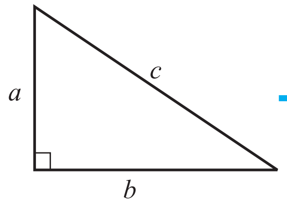


Figura	Aria $\mathcal{A}_1$	Aria $\mathcal{A}_2$	Aria $\mathcal{A}_3$	Aria $\mathcal{A}_1$ + Aria $\mathcal{A}_2$
①		16		
②			32	

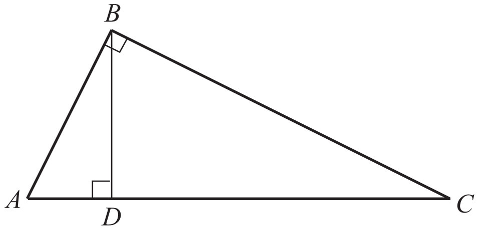
• Considerând a și b lungimile catetelor, iar c – lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic, formulați o propoziție matematică adevărată care ar exprima dependența lui c de a și b.

Teorema lui Pitagora

Pătratul lungimii ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor sale.



$\rightarrow$ $c^2 = a^2 + b^2$



Să demonstrăm teorema lui Pitagora.

Ipoteză: ΔABC, $m(\angle B) = 90°$.

Concluzie: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Demonstrație:

① Construim înălțimea $[BD]$, $D \in (AC)$.

② Aplicăm teorema catetei pentru fiecare dintre catetele triunghiului ABC:

$AB^2 = AD \cdot AC$, (1)

$BC^2 = CD \cdot AC$. (2)

③ Adunând relațiile (1) și (2), obținem

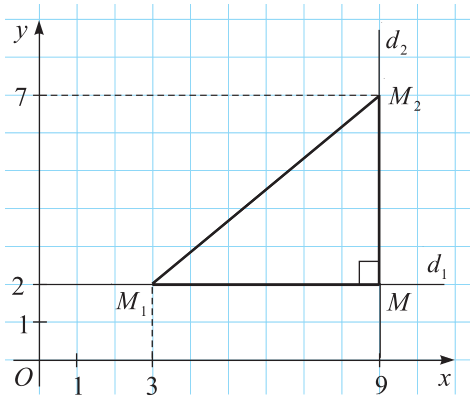
$$AB^2 + BC^2 = AD \cdot AC + CD \cdot AC = AC(AD + CD) = AC \cdot AC = AC^2.$$

④ Din ③ rezultă că $AC^2 = AB^2 + BC^2$, c.c.t.d. ►

• Lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egală cu 10 cm, iar a unei catete – cu 8 cm. Aflați lungimea celeilalte catete.

• Completați, astfel încât să obțineți **reciproca teoremei lui Pitagora**, care de asemenea este teoremă: *Dacă pătratul lungimii unei laturi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi ale unui triunghi, atunci...*

2 Fie $M_1(3;\,2)$ și $M_2(9;\,7)$ două puncte într-un sistem de axe ortogonale xOy. Aflați distanța dintre punctele M_1 și M_2.



Explicăm

① Reprezentăm punctele M_1 și M_2 în sistemul xOy.

② Construim prin punctul M_1 dreapta d_1, paralelă cu axa Ox, iar prin punctul M_2 – dreapta d_2, paralelă cu axa Oy.

③ Fie M punctul de intersecție a dreptelor d_1 și d_2.

ΔM_1MM_2 – dreptunghic, $m(\angle M)=90°$.

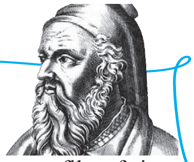
④ Conform teoremei lui Pitagora,

$$M_1M_2=\sqrt{M_1M^2+M_2M^2}=\sqrt{(9-\boxed{})^2+(\boxed{}-2)^2}=\boxed{}\ \text{(u. l.)}.$$

Răspuns: $M_1M_2=\boxed{}$ unități de lungime.

INTERESANT ȘI UTIL

Există circa 300 de modalități de demonstrație a teoremei lui Pitagora. În școala lui Pitagora această teoremă era numită „puntea măgarilor”.



Pitagora – filosof și matematician grec (570 î.H. – 495 î.H.)

• Demonstrați următoarea teoremă.

Teoremă

Dacă $M_1(x_1;y_1)$ și $M_2(x_2;y_2)$ sunt două puncte într-un sistem de axe ortogonale, atunci $M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

• Aplicând teorema lui Pitagora, construiți un segment cu lungimea de:

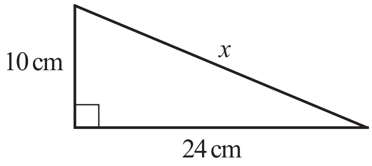
a) $3\sqrt{2}$ cm; b) $\sqrt{19}$ cm.

Exerciții și probleme

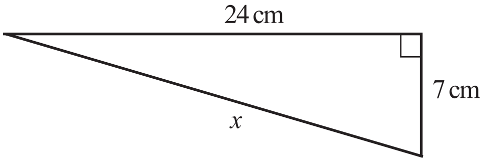
1 ☐ ☐

1. Examinați desenul și calculați x:

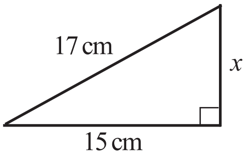
a)



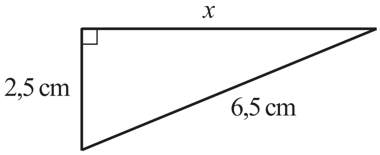
b)



c)



d)



2. Aflați lungimea diagonalei unui dreptunghi cu laturile de 16 cm şi 30 cm.

3. Aflați lungimea laturii unui pătrat cu diagonala de $\sqrt{14}$ cm.

4. Aflați lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel cu aria de 100 cm^2.

5. Aflați lungimea laturii unui romb cu diagonalele de:
a) 30 cm şi 70 cm; b) 140 cm şi 48 cm.

6. Calculați înălțimea unui triunghi echilateral cu latura de:
a) 10 cm; b) $12\sqrt{3}$ cm.

7. Aflați distanța dintre punctele:
a) $A(-1; 4)$ şi $B(4; 12)$; b) $C(4; -3)$ şi $D(7; -2)$;
c) $E(7; 5)$ şi $F(-5; 11)$; d) $G(9; -9)$ şi $H(-1; -4)$.

8. Aflați lungimea laturii unui triunghi echilateral cu înălțimea de:
a) 8 cm; b) $\sqrt{3}$ cm.

9. Decideți dacă triunghiul este dreptunghic, ştiind că lungimile laturilor lui sunt egale cu:
a) 16 cm, 30 cm, 34 cm; b) 8 cm, 12 cm, 16 cm;
c) 9 cm, 15 cm, $3\sqrt{34}$ cm; d) 15 cm, 20 cm, 25 cm.

☐ **2** ☐

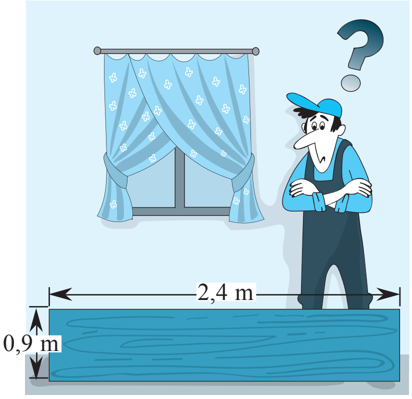
10. Un dreptunghi cu perimetrul de 544 cm are dimensiunile proporționale cu 5 şi 12. Aflați lungimea diagonalei dreptunghiului.

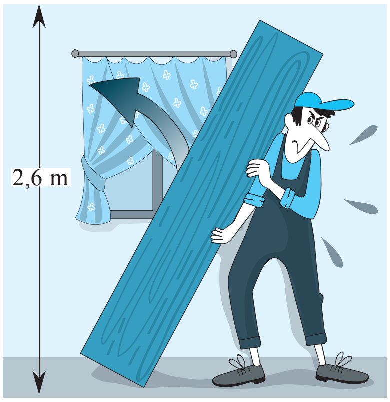
11. Aflați lungimea diagonalei unui dreptunghi cu aria de 480 cm^2 şi perimetrul de 92 cm.

12. Fie $[CD]$ o înălțime a triunghiului ABC. Aflați AC, dacă $AB = 3$ cm, $CD = \sqrt{3}$ cm, $AD = BC$.

13. O latură a unui triunghi dreptunghic este cu 10 cm mai lungă, iar alta – cu 10 cm mai scurtă decât a treia latură. Aflați lungimea ipotenuzei.

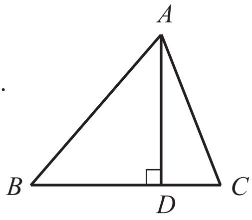
14. Partea laterală a unui dulap are formă dreptunghiulară (vezi desenul) cu dimensiunile: 2,4 m şi 0,9 m. Înălțimea pereților camerei este de 2,6 m. Vor permite dimensiunile dulapului ca acesta să fie ridicat şi sprijinit de perete? Ce lățime maximă ar putea avea partea laterală a dulapului ca acesta să poată fi ridicat?





☐ ☐ **3**

15. Examinați desenul şi aflați AD, dacă $\frac{DB}{CD} = 3,(3)$, $AB = 50$ cm, $AC = 41$ cm.



16. Lungimile laturilor unui triunghi sunt egale cu 10 cm, 17 cm şi 21 cm. Aflați lungimea înălțimii corespunzătoare laturii mai mari.

17. Demonstrați că într-un trapez dreptunghic diferența pătratelor lungimilor diagonalelor este egală cu diferența pătratelor lungimilor bazelor.

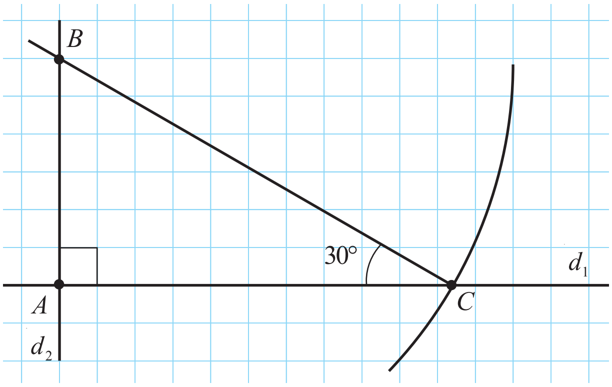
18. ***Matematică distractivă***
Dacă $a^2 + b^2 = c^2$, unde a, b, c sunt numere naturale nenule, atunci a, b, c se numesc **numere pitagoreice**, iar (a, b, c) – **triplet pitagoreic**.
Formați cu numerele 7, 8, 9, 15, 17, 24, 25, 35, 36, 39, 40, 41, 112, 113 cinci triplete pitagoreice (un număr poate fi folosit de mai multe ori).

§3. Elemente de trigonometrie în triunghiul dreptunghic

1 Construiți pe o rețea de pătrate doar cu rigla și compasul un unghi de 30°.

Explicăm

① Rețeaua de pătrate ne permite să construim cu rigla doar drepte paralele și perpendiculare.



Construim dreptele perpendiculare d_1 și d_2, unde $\{A\} = d_1 \cap d_2$.

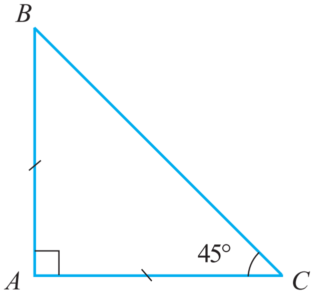
② Construim pe dreapta d_2 un punct arbitrar B.

③ Construim cercul $\mathscr{C}(B,\ 2AB)$, unde $\{C,\ C_1\} = \mathscr{C}(B,\ 2AB) \cap d_1$ (C_1 nu este reprezentat pe desen).

④ Construim $[CB$.

⑤ $m(\angle ACB) = 30°$ (ΔBAC – dreptunghic, $m(\angle A) = 90°$, $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$).

• La rezolvarea problemei, am ținut cont că dacă în triunghiul BAC dreptunghic în A are loc egalitatea $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, atunci $m(\angle BCA) = 30°$. Utilizând desenul și teorema lui Pitagora, determinați care trebuie să fie valoarea raportului $\frac{AB}{BC}$ pentru ca unghiul construit BCA să fie de 45°.

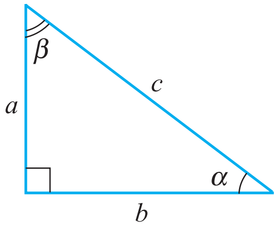


Observație

Fiecărui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic îi corespunde o unică valoare a raportului dintre cateta opusă lui și ipotenuză, indiferent de dimensiunile triunghiului și invers.

Această propoziție rămâne adevărată și în cazul altor rapoarte dintre laturile triunghiului dreptunghic. Așa cum rapoartele menționate determină în mod univoc măsura unghiului, deseori este mai comodă utilizarea acestora decât a unghiurilor. Din acest motiv, rapoartele laturilor unui triunghi dreptunghic au noțiuni și notații speciale.

Definiții



- **Sinusul** unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic este raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului și lungimea ipotenuzei.
  Sinusul unghiului α se notează prin $\sin\alpha$.
  Conform desenului, $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.
- **Cosinusul** unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic este raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului și lungimea ipotenuzei.
  Cosinusul unghiului α se notează prin $\cos\alpha$. Conform desenului, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.
- **Tangenta** unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic este raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului și lungimea catetei alăturate.
  Tangenta unghiului α se notează prin $\text{tg}\alpha$. Conform desenului, $\text{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.
- **Cotangenta** unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic este raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului și lungimea catetei opuse lui.
  Cotangenta unghiului α se notează prin $\text{ctg}\alpha$. Conform desenului, $\text{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

• Scrieți rapoartele care definesc sinusul, cosinusul, tangenta şi cotangenta unghiului β al triunghiului reprezentat în definiții.

Observații

1. Deoarece lungimea catetei este mai mică decât cea a ipotenuzei, sinusul şi cosinusul unui unghi ascuțit sunt numere pozitive mai mici decât 1.

2. Sinusul, cosinusul, tangenta, cotangenta se numesc **funcții trigonometrice**.

3. Funcțiile trigonometrice *sinus* şi *cosinus* se numesc **cofuncții**, la fel ca şi funcțiile *tangentă* şi *cotangentă*.

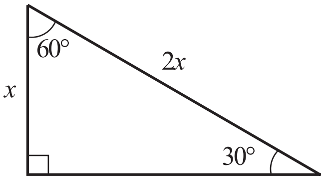
LUCRARE PRACTICĂ

1. Deoarece cateta opusă unghiului de 30° este de două ori mai scurtă decât ipotenuza, rezultă că $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

Examinați desenul.

Aplicând teorema lui Pitagora şi definițiile funcțiilor trigonometrice, calculați:

$\cos 30°$, $\operatorname{tg} 30°$, $\operatorname{ctg} 30°$, $\sin 60°$, $\cos 60°$, $\operatorname{tg} 60°$, $\operatorname{ctg} 60°$.



2. Luând în considerare că dacă un unghi al unui triunghi dreptunghic este de 45°, iar catetele lui sunt congruente, calculați:

$$\sin 45°,\ \cos 45°,\ \operatorname{tg} 45°,\ \operatorname{ctg} 45°.$$

3. Completați tabelul:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$			
45°		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	

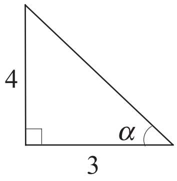
Observație

Tabelul valorilor funcțiilor trigonometrice se numeşte, pe scurt, ***tabel trigonometric***.

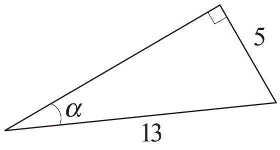
Exerciții şi probleme

1 ☐ ☐

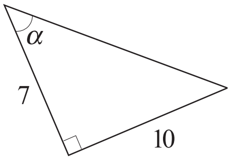
1. Calculați, utilizând datele din desen, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$:



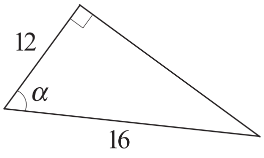
a)



b)

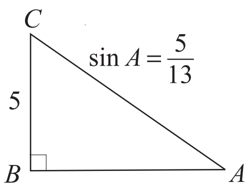


c)

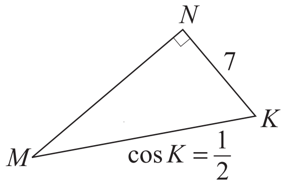


d)

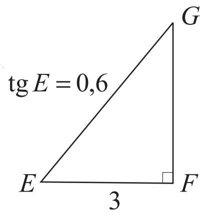
2. Calculați lungimea laturilor necunoscute:



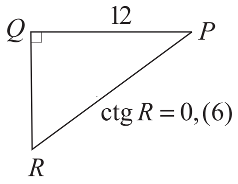
a)



b)



c)



d)

3. Calculați utilizând tabelul trigonometric:

a) $\sin 45° + \cos 45°$; b) $\sin 60° \cdot \mathrm{tg} 60°$;

c) $\cos 30° \cdot \mathrm{ctg} 30°$; d) $\frac{\sin 30°}{\cos 60°}$; e) $\frac{\cos 30°}{\sin 60°}$.

4. Comparați utilizând tabelul trigonometric:

a) $\frac{\sin 30°}{\cos 30°}$ și $\mathrm{tg} 30°$; b) $\frac{\sin 45°}{\cos 45°}$ și $\mathrm{tg} 45°$;

c) $\mathrm{ctg} 60°$ și $\frac{\cos 60°}{\sin 60°}$; d) $\mathrm{ctg} 30°$ și $\frac{\cos 30°}{\sin 30°}$;

e) $\mathrm{tg} 30°$ și $\frac{1}{\mathrm{ctg} 30°}$.

5. Utilizând tabelul trigonometric, ordonați crescător numerele:

a) 1, $\sin 45°$, $\sin 30°$, 0, $\sin 60°$;

b) 0, $\cos 45°$, $\cos 30°$, 1, $\cos 60°$;

c) $\mathrm{tg} 60°$, $\mathrm{tg} 30°$, $\mathrm{tg} 45°$, 1, 0;

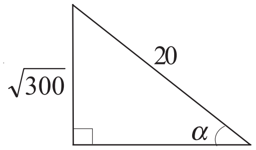
d) $\mathrm{ctg} 30°$, $\mathrm{ctg} 60°$, $\mathrm{ctg} 45°$, 0, 1.

6. Construiți un triunghi DEF dreptunghic în E, astfel încât:

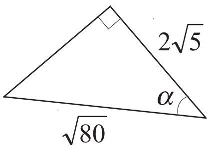
a) $\sin F = 0{,}7$; b) $\cos D = 0{,}5$;

c) $\mathrm{tg}\, F = 1{,}4$; d) $\mathrm{ctg}\, D = 4\frac{1}{3}$.

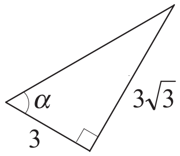
7. Calculați măsura α a unghiului, utilizând tabelul trigonometric:



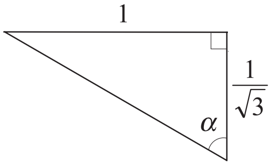
a)



b)



c)

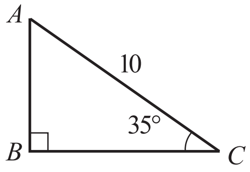


d)

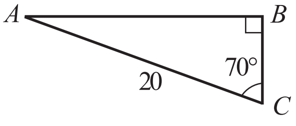
☐ **2** ☐

sin 35° ≈ 0,574
cos 70° ≈ 0,342
sin 50° ≈ 0,766
cos 62° ≈ 0,469

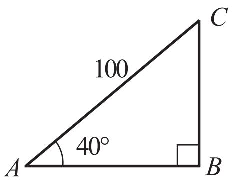
8. Examinați desenul și panoul, apoi aflați lungimile laturilor necunoscute ale triunghiului ABC:



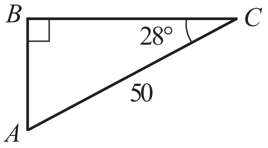
a)



b)



c)



d)

9. Triunghiul ABC este dreptunghic în B, $AB = 15$ cm, $BC = 9$ cm. Calculați:

a) $\sin^2 A + \cos^2 A$; $\sin^2 C + \cos^2 C$; b) $\frac{\sin A}{\cos A}$, $\mathrm{tg} A$; $\frac{\sin C}{\cos C}$, $\mathrm{tg} C$;

c) $\frac{\cos A}{\sin A}$, $\mathrm{ctg}\, A$; $\frac{\cos C}{\sin C}$, $\mathrm{ctg} C$; d) $\frac{1}{\cos^2 A}$, $1 + \mathrm{tg}^2 A$; $\frac{1}{\cos^2 C}$, $1 + \mathrm{tg}^2 C$;

e) $\frac{1}{\sin^2 A}$, $1 + \mathrm{ctg}^2 A$; $\frac{1}{\sin^2 C}$, $1 + \mathrm{ctg}^2 C$.

10. Perimetrul triunghiului ABC dreptunghic în B este egal cu $\mathscr{P}$. Aflați lungimile laturilor triunghiului, dacă:

a) $\mathscr{P} = 120$ cm, $\mathrm{tg}\, C = 2{,}4$; b) $\mathscr{P} = 28{,}8$ cm, $\sin C = 0{,}6$;

c) $\mathscr{P} = 42$ cm, $\mathrm{ctg}\, A = 1{,}05$; d) $\mathscr{P} = 57{,}2$ cm, $\cos A = 0{,}352$.

11. Stabiliți dacă propoziția este adevărată:

a) „Există un unghi ascuțit α, pentru care $\sin\alpha=\sqrt{2-\sqrt{3}}$”;

b) „Există un unghi ascuțit α, pentru care $\cos\alpha=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$”;

c) „Există un unghi ascuțit α, pentru care $\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{3}+2$”;

d) „Există un unghi ascuțit α, pentru care $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$”.

☐ ☐ 3

12. Demonstrați că $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ pentru orice unghi ascuțit α.

13. Demonstrați că pentru orice unghi ascuțit α au loc relațiile:

a) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\mathrm{tg}\alpha$, $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$;

b) $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$, $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

14. Luând în considerare că $\sin\alpha=0{,}8$ şi relațiile din problemele **12**, **13**, calculați $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$.

15. Triunghiul *MNK* este dreptunghic în *N*. Calculați:

a) sin *M*, cos *M*, tg *M*, ctg *M*, sin *K*, tg *K*, ctg *K*, dacă $\cos K=0{,}6$;

b) cos *M*, tg *M*, ctg *M*, sin *K*, cos *K*, tg *K*, ctg K, dacă $\sin M=\frac{5}{13}$;

c) sin *M*, cos *M*, tg *M*, ctg *M*, sin K, cos *K*, ctg *K*, dacă $\mathrm{tg}\,K=2{,}4$;

d) sin *M*, cos *M*, tg *M*, sin *K*, cos *K*, tg *K*, ctg *K*, dacă $\mathrm{ctg}\,M=1$.

16. a) Se ştie ca $\sin 19°\approx 0{,}33$. Calculați $\sin 71°$.

b) Se ştie că $\cos 64°\approx 0{,}44$. Calculați $\cos 36°$.

c) Se ştie că $\sin 25°\approx 0{,}42$. Calculați $\mathrm{tg}\ 65°$.

d) Se ştie că $\cos 40°\approx 0{,}77$. Calculați $\mathrm{ctg}\ 50°$.

17. Luând în cosiderare că, pentru orice unghi ascuțit α, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\mathrm{tg}\alpha$, aflați valoarea expresiei $\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{3\cos\alpha-2\sin\alpha}$, dacă $\mathrm{tg}\alpha=2$.

18. ***Matematică pentru viață***

Pe o masă de forma unui cerc cu raza de 1,5 m se pune o față de masă de forma unui pătrat cu latura de 2 m, astfel încât centrul pătratului să coincidă cu centrul cercului. Înălțimea mesei este de 80 cm.

a) Care este lungimea maximă a părții din fața de masă care atârnă?

b) Care este lungimea minimă a părții din fața de masă care atârnă?

c) Cât de mare poate fi latura altei fețe de masă, astfel încât ea să nu ajungă la podea?

Exerciții și probleme recapitulative

1 ☐ ☐

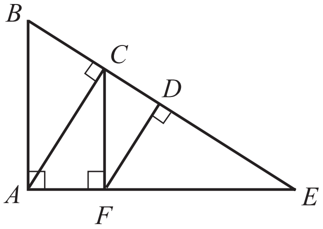
1. Examinați desenul şi aflați proiecția:

a) punctului *C* pe *AE*;

b) punctului *F* pe *BE*;

c) segmentului *AC* pe *AE*;

d) segmentului *AF* pe *BE*.



2. Aflați lungimea înălțimii unui triunghi dreptunghic, dacă lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză sunt egale cu:

a) 24 cm şi 54 cm; b) 36 cm şi 49 cm.

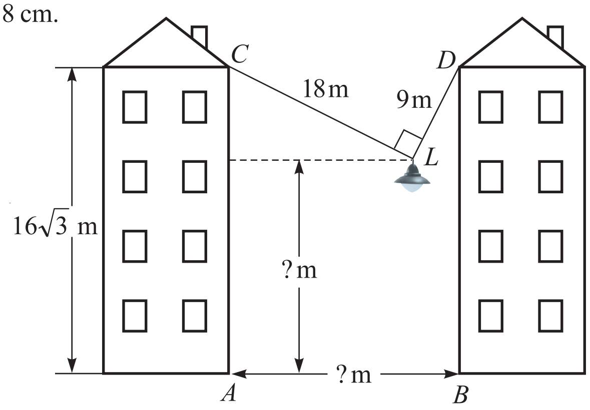
3. Aflați lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic, dacă lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză sunt egale cu:
a) 16 cm şi 36 cm; b) 0,25 cm şi 2 cm.

4. Suma lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este egală cu 34 cm, iar lungimea ipotenuzei este egală cu 26 cm. Aflați lungimile catetelor.

5. Aria unui triunghi dreptunghic este egală cu 15 cm^2, iar lungimea ipotenuzei este egală cu $\sqrt{61}$ cm. Aflați lungimile catetelor.

6. Aflați lungimea înălțimii unui triunghi echilateral cu latura de 18 cm.

7. O lampă care iluminează strada este suspendată de două cabluri perpendiculare (vezi desenul: L – lampa, $m(\angle CLD) = 90°$), unul de 18 m, altul – de 9 m, legate la înălțimea de $16\sqrt{3}$ m de la sol. Punctele C şi D se află la aceeaşi înălțime de la sol.
a) Aflați lățimea străzii (adică AB).
b) Calculați la ce înălțime de la sol este suspendată lampa.



8. Aflați lungimea razei cercului care conține vârfurile unui triunghi echilateral cu latura de 9 cm.

9. Aflați lungimea înălțimii unui triunghi echilateral cu aria de $36\sqrt{3}$ cm^2.

10. Vârfurile pătratului $MNKP$ împart fiecare latură a pătratului $ABCD$ în raportul 3:4. Aflați:
a) latura pătratului $MNKP$, dacă $AB = 28$ cm;
b) latura pătratului $ABCD$, dacă $MN = 10$ cm.

11. Aflați lungimea bazei unui triunghi isoscel, dacă înălțimea corespunzătoare bazei este de 10 cm, iar înălțimea corespunzătoare laturii laterale – de 12 cm.

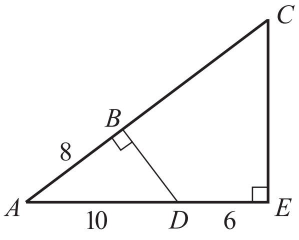
12. Fie trapezul $ABCD$ cu baza mare AD, $AB = 6$ cm, $CD = 8$ cm, $AD = 20$ cm, $BC = 10$ cm. Aflați înălțimea trapezului.

☐ **2** ☐

13. Aflați lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 10 cm, dacă lungimea înălțimii corespunzătoare ei reprezintă 40% din lungimea ipotenuzei.

14. Fie BD o înălțime a triunghiului ABC. Aflați BD şi DC, dacă $AB = 12$ cm, $BC = 14$ cm, $AD = 8$ cm.

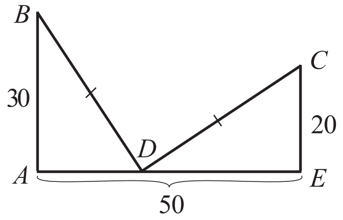
15. Examinați desenul şi calculați BC.
Indicație. Utilizați $\cos A$.



☐ ☐ **3**

16. Aflați lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic cu un unghi de 30°, dacă o catetă este cu 30 cm mai scurtă decât ipotenuza.

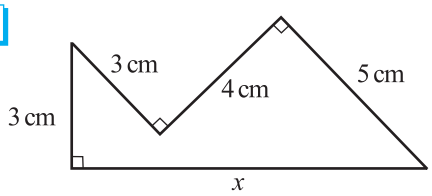
17. Examinați desenul și aflați AD.



18. Demonstrați că într-un triunghi dreptunghic bisectoarea unghiului drept este și bisectoarea unghiului format de mediana și înălțimea construite din acest vârf.

• *Problemă pentru campioni*

19. Examinați desenul și aflați lungimea x.



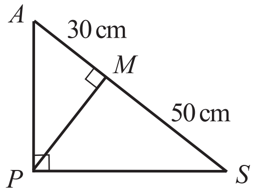
20. ***Lucrați în grup!*** Proiect *Aplicații ale relațiilor metrice în construcții.*

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta 1

1. Examinați desenul și aflați:
a) proiecția punctului P pe AS;
b) proiecția catetei PS pe AS.



2. Examinați desenul sarcinii **1** și aflați:
a) PM;
b) AP și PS.

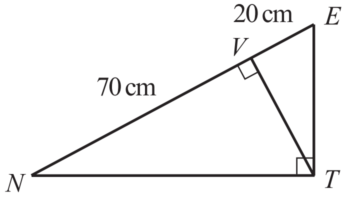
3. Aflați lungimea diagonalei unui pătrat cu aria de 20 cm^2.

4. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu baza mare AD, $m(\angle A)=90°$. Aflați lungimea înălțimii trapezului, dacă: $AD=25$ cm, $BC=CD=13$ cm.

5. Aflați lungimea unui dreptunghi care are lățimea de $8\sqrt{5}$ cm și diagonala de 32 cm.

Varianta 2

1. Examinați desenul și aflați:
a) proiecția punctului T pe NE;
b) proiecția catetei ET pe NE.



2. Examinați desenul sarcinii **1** și aflați:
a) VT;
b) NT și ET.

3. Aflați lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel cu aria de 20 cm^2.

4. Un trapez isoscel are laturile neparalele și baza mică de 34 cm, iar baza mare – de 66 cm. Aflați lungimea înălțimii trapezului.

5. Aflați lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza de 12 cm.

Capitolul 5 Vectori în plan

> *A rezolva o problemă înseamnă a găsi o ieşire dintr-o dificultate.*
> George Polya

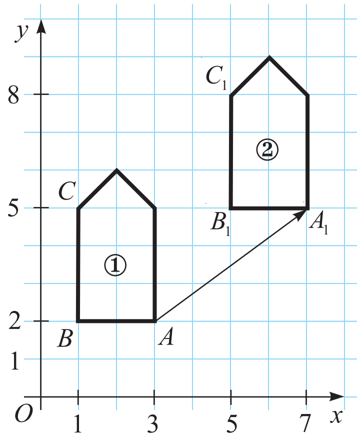
§1. Translația. Noțiunea de vector

1.1. Translația

1 Figura ② este obținută din figura ① prin deplasarea cu 4 unități de lungime la dreapta şi cu 3 unități de lungime în sus a fiecărui punct al ei.

Observați şi completați:

- Punctul $A(3;\ 2)$ „a trecut” în punctul $A_1(7;\ 5)$.
- Punctul $B(1;\ 2)$ „a trecut” în punctul $B_1($☐$;$ ☐$)$.
- Punctul $C($☐$;$ ☐$)$ „a trecut” în punctul $C_1(5;\ 8)$.
- Dacă punctul $M(x;\ y)$ „a trecut” în punctul $M_1(x_1;\ y_1)$, atunci $x_1 = x + 4$, $y_1 = y +$ ☐.



Observație Se spune că figura ② a fost obținută din figura ① în urma unei translații, definită prin formulele $x_1 = x + 4$, $y_1 = y + 3$.

Definiție Transformarea planului în el însuşi, care asociază fiecărui punct $M(x;\ y)$ din plan un punct $M_1(x + a;\ y + b)$, unde a şi b sunt numere reale, se numeşte **translație**. Punctul M_1 se numeşte **imaginea** punctului M la această translație.

2 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții şi trageți concluzii.

a) Translația păstrează distanța dintre puncte.

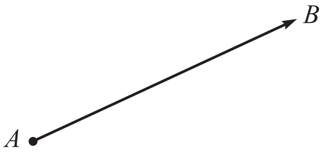
b) La o translație, imaginea unui segment este un segment congruent cu el.

c) La o translație, imaginea unei drepte este o dreaptă paralelă cu ea.

d) La o translație, imaginea unui cerc este un cerc congruent cu el.

1.2. Noțiunea de vector

Orice pereche ordonată de puncte A şi B din plan determină un **segment orientat**, notat $\overrightarrow{AB}$. Punctul A se numeşte **originea**, iar B – **vârful** segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$.



În afară de origine şi vârf, segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ este caracterizat prin:

1. **modul** – lungimea segmentului AB (se notează $|\overrightarrow{AB}|$);
2. **direcție** – este determinată de dreapta AB sau de orice altă dreaptă paralelă cu AB;
3. **sens** – este pus în evidență de săgeată (în cazul nostru, se spune „de la A la B”).

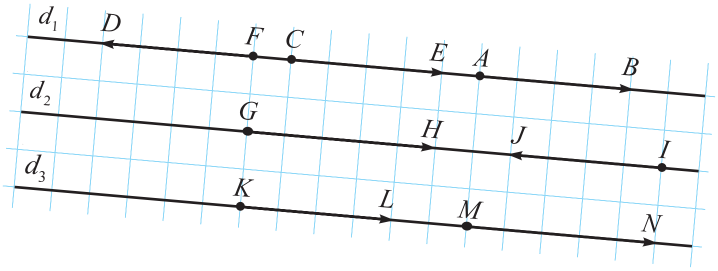
Observație

Dacă A şi B sunt două puncte diferite, atunci $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BA}$ sunt două segmente **orientate diferit** (sau **opus orientate**).

1 Examinați desenul şi selectați toate segmentele orientate care au acelaşi modul, aceeaşi direcție şi acelaşi sens cu cele ale segmentului $\overrightarrow{AB}$.

Explicăm

Luând în considerare că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt paralele, obținem că $\overrightarrow{CE}$ şi $\overrightarrow{KL}$ au acelaşi modul, aceeaşi direcție şi acelaşi sens ca şi segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$.



Definiție

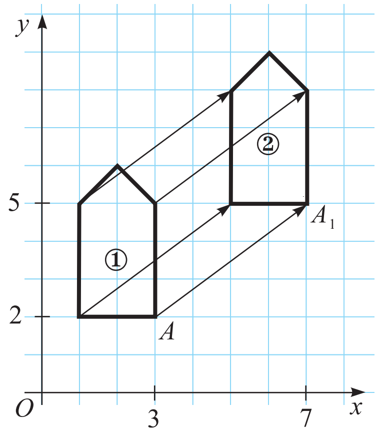
Se numeşte **vector** mulțimea tuturor segmentelor orientate care au acelaşi modul, aceeaşi direcție şi acelaşi sens ca şi un segment orientat dat.

Un vector se notează cu o literă mică din alfabetul latin şi o săgeată deasupra sau cu notația unuia din segmentele orientate care definesc vectorul. Astfel, segmentele orientate $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$ şi $\overrightarrow{KL}$ (din desenul problemei **1**) definesc acelaşi vector, care poate fi notat $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$ sau $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{KL}$ etc.

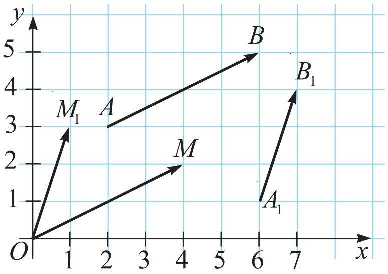
Observație

Analizând exemplul **1** din secvența 1.1 a paragrafului curent, observăm că fiecare segment orientat cu originea aparținând figurii ① şi vârful care este imaginea acestei origini (şi aparține figurii ②) reprezintă acelaşi vector ca şi $\overrightarrow{AA_1}$ (vezi desenul alăturat).

Prin urmare, putem numi această transformare a planului **translație de vector** $\overrightarrow{AA_1}$.



2 Examinați desenul şi comparați creşterile coordonatelor la parcurgerea segmentelor orientate AB şi A_1B_1 respectiv cu coordonatele punctelor M şi M_1. Ce observați?



Explicăm

$A(2;\ 3)$, $B(6;\ 5)$.

Coordonata x creşte cu $6-2=4$ (unităţi), iar y – cu $5-3=2$ (unităţi).

$M(4;\ 2)$

$A_1(6;\ 1)$, $B_1(7;$ ☐ $)$

Coordonata x creşte cu 1 (unităţi), iar y – cu ☐ $-1=$ ☐ (unităţi).

$M_1(1;$ ☐ $)$

Observăm că $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{OM}$ reprezintă acelaşi vector, iar $\overrightarrow{A_1B_1}$ şi $\overrightarrow{OM_1}$ – alt vector.

Se spune că vectorul $\overrightarrow{AB}$ are coordonatele $(4;\ 2)$, iar vectorul $\overrightarrow{A_1B_1}$ – coordonatele $(1;$ ☐ $)$.

Definiție

Fie punctele $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$. **Coordonatele vectorului** $\overrightarrow{AB}$ sunt numerele x_2-x_1 şi y_2-y_1.

Notăm $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$.

Observații

1. În exemplul 2 vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{A_1B_1}$ pot fi notați respectiv $\overrightarrow{AB}(4;\ 2)$ şi $\overrightarrow{A_1B_1}(1;\ 3)$.

2. **Vectorul nul** are coordonatele $(0;\ 0)$. Notăm $\vec{0}(0;\ 0)$.

3. **Vectorii egali** au coordonate egale: $\vec{u}(a;\ b)=\vec{v}(c;\ d)$, dacă $a=c$ şi $b=d$.

4. Prin **modulul** (sau **lungimea**) **vectorului** vom înțelege modulul unui segment orientat, reprezentant al acestui vector.

5. Pentru a scurta exprimarea, în loc de expresia „vectorul al cărui reprezentant este segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$”, vom spune „vectorul $\overrightarrow{AB}$”.

6. **Vectorii coliniari** au aceeaşi direcţie (adică se conţin în drepte confundate sau paralele).

7. Fie $A(x_1;\ y_1)$ şi $B(x_2;\ y_2)$. Aşa cum modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ este egal cu lungimea segmentului AB, rezultă că $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

8. La reprezentarea unui vector definit prin coordonatele lui, deseori, pentru comoditate, vom considera punctul $(0;\ 0)$ originea acestui vector.

Aplicăm

Calculați lungimea vectorului:

a) $\overrightarrow{AB}$, dacă $A(-2;\ 1)$, $B(6;\ 16)$;

b) $\vec{a}(3;\ 4)$.

Rezolvare:

a) $AB=\sqrt{(6-(-2))^2+(16-1)^2}=\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{289}=17.$

b) Considerăm $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$, unde O este originea sistemului de axe ortogonale.

Prin urmare, M are coordonatele $(3;\ 4)$.

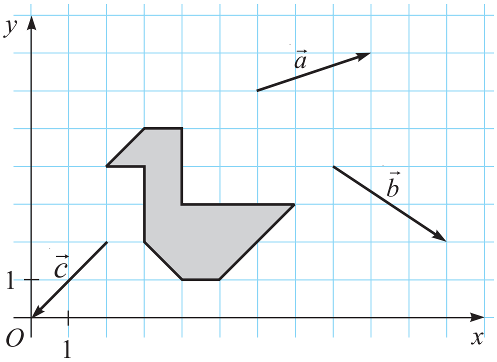
$OM=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5.$ Adică $|\vec{a}|=5$.

Concluzie

Modulul vectorului $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ se calculează cu ajutorul formulei $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}$.

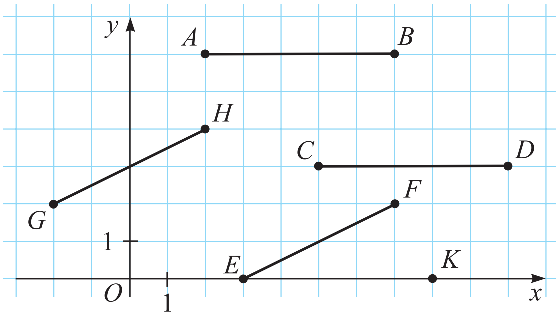
Exerciții și probleme

1 ☐ ☐



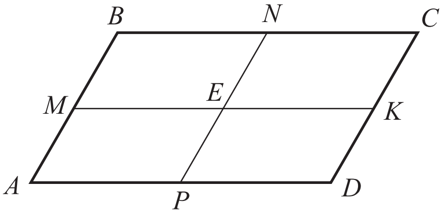
1. Aflați imaginile punctelor A, B, C la translația definită de formulele $x_1 = x - 3$ şi $y_1 = y + 5$, dacă:
a) $A(1;\ 2)$, $B(-2;\ 5)$, $C(4;\ -6)$;
b) $A(2;\ 9)$, $B(-3;\ 7)$, $C(-8;\ -5)$;
c) $A(0;\ 4)$, $B(4;\ -9)$, $C(-11;\ 7)$.

2. Reproduceți desenul şi construiți imaginea figurii colorate la translația de vector:
a) $\vec{a}$; b) $\vec{b}$; c) $\vec{c}$.



3. Examinați desenul. Scrieți formulele translației care „trece”:
a) segmentul AB în segmentul CD;
b) segmentul EF în segmentul GH;
c) segmentul AB în segmentul EK.

4. La o translație, punctul $A(3;\ 0)$ „a trecut” în punctul $B(0;\ 3)$. În ce punct „a trecut” la această translație punctul:
a) $M(1;\ 4)$; b) $N(4;\ 1)$; c) $K(1;\ -1)$; d) $P(-3;\ 7)$?



5. Punctele M, N, K, P sunt mijloacele laturilor paralelogramului $ABCD$ (vezi desenul), iar E este punctul de intersecție a segmentelor MK şi NP. Scrieți toți vectorii (care pot fi puşi în evidență pe desen) egali cu:
a) $\overrightarrow{AM}$; b) $\overrightarrow{BN}$; c) $\overrightarrow{AE}$; d) $\overrightarrow{DE}$.

6. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale un vector cu originea în $O(0;\ 0)$ şi coordonatele:
a) $(3;\ 5)$; b) $(-2;\ 4)$; c) $(-4;\ 2)$; d) $(-7;\ -3)$.

7. Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale un vector:
a) cu originea în punctul $A(1;\ 2)$ şi coordonatele $(2;\ 2)$;
b) cu originea în punctul $B(-1;\ 1)$ şi coordonatele $(4;\ -3)$;
c) cu originea în punctul $C(3;\ -4)$ şi coordonatele $(-3;\ 4)$.

8. Aflați coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$, dacă:
a) $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 5)$; b) $A(-4;\ 5)$, $B(1;\ 17)$;
c) $A(2;\ -5)$, $B(13;\ 55)$; d) $A(-7;\ 6)$, $B(28;\ 18)$.

9. Aflați modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ din problema **8**.

10. Aflați modulul vectorului:
a) $\vec{a}(5;\ 12)$; b) $\vec{b}(8;\ 15)$;
c) $\vec{c}(7;\ 24)$; d) $\vec{d}(9;\ 40)$.

☐ **2** ☐

11. Aflați coordonatele punctelor A, B, C, dacă în urma translației definite de formulele $x_1 = x + 2$, $y_1 = y - 7$ ele „au trecut” respectiv în punctele:
a) $A_1(0;\ 2)$, $B_1(3;\ 1)$, $C_1(-1;\ 1)$;
b) $A_1(3;\ 10)$, $B_1(8;\ -4)$, $C_1(6;\ 0)$;
c) $A_1(0;\ -3)$, $B_1(3;\ 8)$, $C_1(-9;\ 6)$.

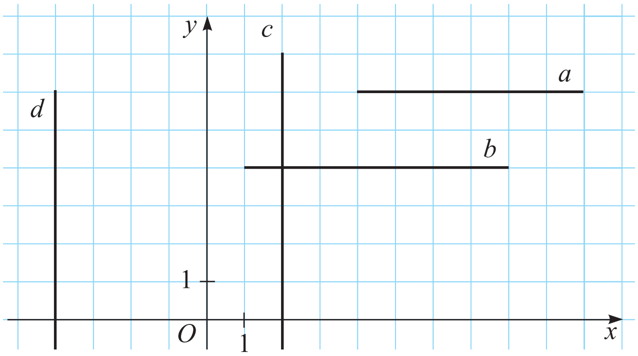
12. Determinați dacă există o translație care „trece” punctul A în punctul B, iar punctul C în punctul D, dacă:
a) $A(3;\ 3)$, $B(7;\ 5)$, $C(3;\ 1)$, $D(7;\ 3)$;
b) $A(-1;\ 3)$, $B(1;\ 2)$, $C(-1;\ -2)$, $D(-1;\ -1)$;
c) $A(-2;\ -1)$, $B(6;\ 1)$, $C(2;\ -2)$, $D(10;\ 0)$.

13. Fie $A(-2; 4)$ şi $B(0; 2)$. Aflați coordonatele punctului C, dacă:
a) segmentele $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt opus orientate şi au acelaşi modul;
b) vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{OC}$ sunt egali (O este originea sistemului de axe ortogonale);
c) vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{OC}$ sunt coliniari, au acelaşi sens şi modulul lui $\overrightarrow{OC}$ este de două ori mai mare decât modulul lui $\overrightarrow{AB}$ (O este originea sistemului de axe ortogonale).

14. Aflați numerele reale m şi n pentru care sunt egali vectorii:
a) $\vec{a}(2m-1; 8)$ şi $\vec{b}(9; 3n-1)$;
b) $\vec{a}(10; -4n+5)$ şi $\vec{b}(-m+7; 13)$;
c) $\vec{a}(m+6; 11-n)$ şi $\vec{b}(-3m+14; n-11)$.

15. Aflați coordonatele vectorului al cărui modul este egal cu 16 şi care formează cu axa Ox un unghi de:
a) 60°; b) 30°; c) 45°.

☐ ☐ **3**



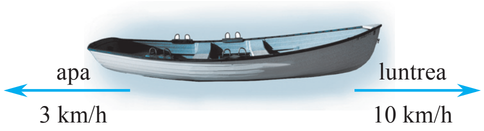
16. Examinați desenul. Scrieți formulele translațiilor care „trec":
a) dreapta a în dreapta b;
b) dreapta c în dreapta d.

17. Fie punctele $A(-2; 1)$, $B(4; 4)$, $C(-3; 1)$.
Aflați coordonatele punctului D, dacă:
a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;
b) $2|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ şi vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt orientați la fel;
c) $|\overrightarrow{CD}| = 2|\overrightarrow{AB}|$ şi vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt opus orientați.

18. Fie punctele $A(2; 4)$, $B(6; -4)$, $C(-8; -1)$. Arătați că vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt perpendiculari.

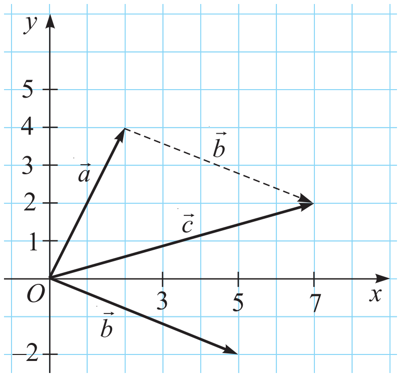
§2. Operații cu vectori

2.1. Adunarea vectorilor



Suma vectorilor $\vec{a}(a_1; a_2)$ şi $\vec{b}(b_1; b_2)$ este vectorul $\vec{c}(a_1+b_1; a_2+b_2)$.
Notăm: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

1 Reprezentați în acelaşi sistem de axe ortogonale vectorii $\vec{a}(2; 4)$, $\vec{b}(5; -2)$ şi $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



Reprezentăm Ținem cont că $\vec{c}(2+5; 4-2) = \vec{c}(7; 2)$.
În desen am reprezentat vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
Vectorul $\vec{c}$ se mai numeşte **rezultanta** vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Rezultanta a doi vectori reprezentați $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se poate desena aplicând regula triunghiului.

Regula triunghiului

Pentru a desena rezultanta (suma) a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, desenăm al doilea vector (adică $\vec{b}$), cu originea în vârful primului vector (adică $\vec{a}$), apoi unim originea primului vector cu vârful vectorului al doilea.

Aplicăm

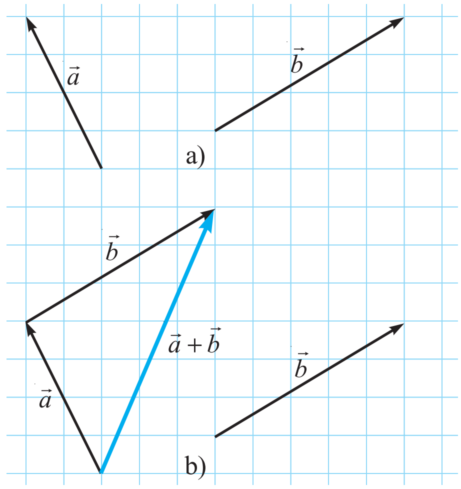
2 Desenați rezultanta vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ reprezentați în desenul (2).

Rezolvare:

Aplicăm regula triunghiului (des. b):

1. redesenăm vectorul $\vec{b}$, astfel încât originea lui să coincidă cu vârful vectorului $\vec{a}$;
2. unim originea lui $\vec{a}$ cu vârful lui $\vec{b}$ (redesenat).

• Reproduceți desenul a), apoi reprezentați vectorul $\vec{b}+\vec{a}$. Ce observați?



Proprietățile adunării vectorilor

Pentru orice vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

1° Comutativitatea ⟶ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2° Asociativitatea ⟶ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

3° Existența elementului neutru ⟶ $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

• Demonstrați proprietatea 2° utilizând coordonatele vectorilor.

2.2. Scăderea vectorilor

Diferența vectorilor $\vec{a}(a_1;\, a_2)$ şi $\vec{b}(b_1;\, b_2)$ este vectorul $\vec{c}(a_1-b_1;\, a_2-b_2)$.
Notăm: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Observație

Evident, $\vec{c}$ este diferența vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ dacă şi numai dacă $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

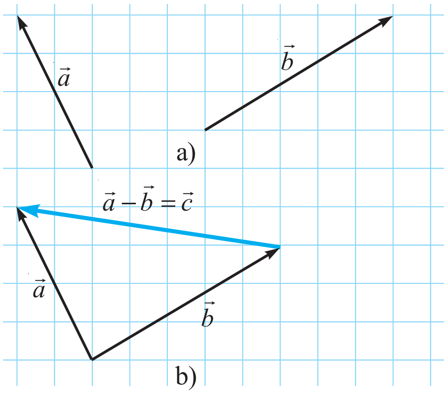
Aplicăm

3 Desenați diferența vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, adică $\vec{a}-\vec{b}$, din desenul a).

Rezolvare:

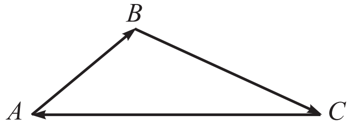
Notăm $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$. Aşa cum $\vec{a}$ este suma vectorilor $\vec{b}$ şi $\vec{c}$, rezultă că vectorul $\vec{a}$ va avea originea comună cu $\vec{b}$ şi vârful comun cu $\vec{c}$:

1. redesenăm vectorul $\vec{b}$, astfel încât originea lui să coincidă cu a lui $\vec{a}$;
2. unim originea lui $\vec{b}$ cu vârful lui $\vec{a}$.



Observații

1. Dacă ABC este un triunghi, atunci $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

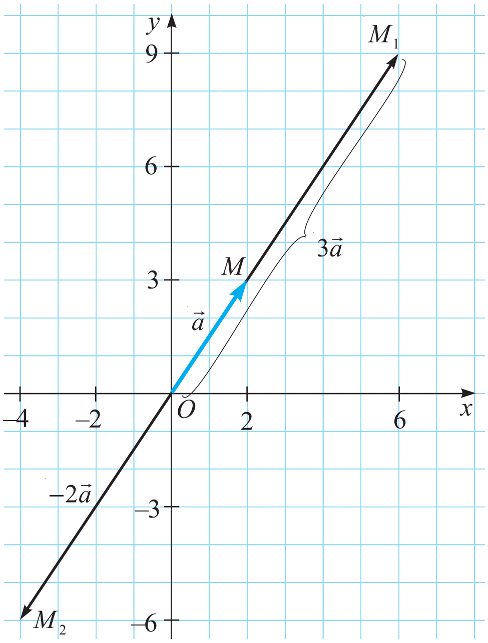


2. Dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sunt 3 vectori nenuli, astfel încât $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, atunci există un triunghi cu laturile $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$.

2.3. Înmulțirea vectorului cu un număr real

Dacă $\vec{a}(a_1;\ a_2)$, iar k este un număr real, atunci prin $k\vec{a}$ vom nota vectorul $(ka_1;\ ka_2)$.

1 Fie $\vec{a}(2;\ 3)$. Reprezentați vectorii $\vec{a}$, $\vec{u}=3\vec{a}$ și $\vec{v}=-2\vec{a}$.



Rezolvăm

$3\vec{a}=\vec{u}=(3\cdot 2;\ 3\cdot 3)=\vec{u}=(6;\ 9)$.

$-2\vec{a}=\vec{v}=(-2\cdot 2;\ -2\cdot 3)=\vec{v}=(-4;\ -6)$.

Pe desen sunt reprezentați vectorii $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OM_1}=3\vec{a}$, $\overrightarrow{OM_2}=-2\vec{a}$.

Observații

Fie $\vec{a}$ un vector și k un număr real.

1. Vectorii $\vec{a}$ și $k\vec{a}$ sunt coliniari.

2. Vectorii $\vec{a}$ și $k\vec{a}$ au același sens pentru $k>0$ și sens opus pentru $k<0$.

3. Pentru orice k număr natural nenul și orice vector $\vec{a}$ are lor relația:

$$k\vec{a}=\underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\ldots+\vec{a}}_{k\text{ ori}}.$$

4. Dacă $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt doi vectori coliniari, atunci există un număr real k, astfel încât $\vec{b}=k\vec{a}$.

- Utilizând notația vectorilor prin coordonate, demonstrați că pentru orice vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și pentru orice numere reale k, t au loc următoarele ***proprietăți ale înmulțirii vectorilor cu numere reale***:

1°. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$; 2°. $(k+t)\vec{a}=k\vec{a}+t\vec{a}$; 3°. $(kt)\vec{a}=k(t\vec{a})$.

Aplicăm

2 Determinați dacă punctele $A(-5;\ 2)$, $B(-1;\ 1)$, $C(7;\ -1)$ sunt coliniare.

Rezolvare:

Punctele A, B, C sunt coliniare dacă și numai dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

Vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari dacă și numai dacă există un număr real k, astfel încât $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB}(-1-(-5);\ 1-2)=\overrightarrow{AB}(4;\ -1)$;

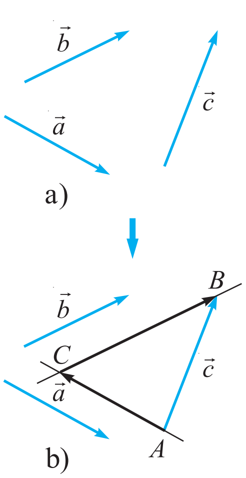
$\overrightarrow{BC}(7-(-1);\ -1-1)=\overrightarrow{BC}(8;\ -2)$;

$k\overrightarrow{BC}(k\cdot 8;\ k\cdot(-2))=k\overrightarrow{BC}(8k;\ -2k)$.

Prin urmare, obținem sistemul $\begin{cases}8k=4,\\ -2k=-1\end{cases}$ cu soluția $k=0{,}5$.

Răspuns: Da, punctele A, B, C sunt coliniare.

2.4. Descompunerea vectorului după doi vectori necoliniari



a)

b)

1 Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori necoliniari (des. a). Să arătăm că orice vector $\vec{c}$ poate fi reprezentat în forma $\vec{c}=k_1\vec{a}+k_2\vec{b}$, unde k_1 şi k_2 sunt două numere reale.

Rezolvare:

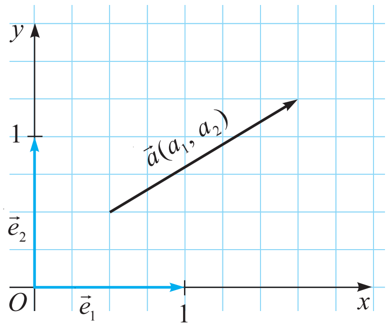
1) Fie $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$. Construim prin punctele A şi B drepte paralele respectiv cu $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Fie C punctul lor de intersecție (des. b). Atunci,

$$\vec{c}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}. \qquad (*)$$

2) Conform observației 4 din secvența 2.3, aşa cum $\vec{a}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari, la fel cum $\vec{b}$ şi $\overrightarrow{CB}$, există numerele reale k_1 şi k_2, astfel încât: $\overrightarrow{AC}=k_1\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=k_2\vec{b}$. $\quad(**)$

3) Substituim (∗∗) în (∗): $\vec{c}=\overrightarrow{AB}=k_1\vec{a}+k_2\vec{b}$, c.c.t.d. ▶

Observație Relația $\vec{c}=k_1\vec{a}+k_2\vec{b}$ din problemă se numeşte **descompunerea vectorului** $\vec{c}$ după vectorii necoliniari $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.



2 Examinați desenul.

Fie vectorii $\vec{e}_1(1;0)$, $\vec{e}_2(0;1)$, $\vec{a}(a_1;a_2)$.

Scrieți descompunerea vectorului $\vec{a}$ după vectorii $\vec{e}_1$ şi $\vec{e}_2$.

Rezolvare:

Aşa cum $\vec{e}_1$ şi $\vec{e}_2$ sunt necoliniari, trebuie să aflăm numerele reale k_1 şi k_2, astfel încât $\quad \vec{a}=k_1\vec{e}_1+k_2\vec{e}_2. \quad (*)$

Scriem detaliat relația (∗).

$\vec{a}(a_1;a_2)=k_1\vec{e}_1(1;0)+k_2\vec{e}_2(0;1)$.

Notăm $k_1\vec{e}_1$ prin $\vec{u}$ şi $k_2\vec{e}_2$ prin $\vec{v}$.

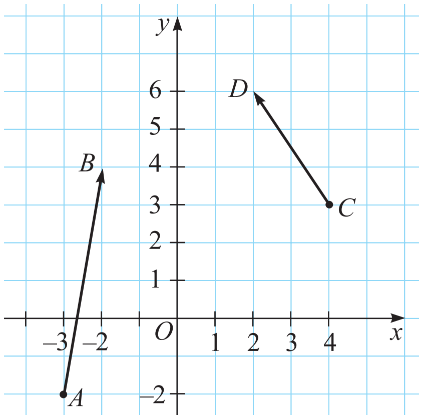
Obținem $\vec{a}(a_1;a_2)=\vec{u}(k_1;0)+\vec{v}(0;k_2)$ sau $\vec{a}(a_1;a_2)=\vec{c}(k_1;k_2)$, unde $\vec{c}=\vec{u}+\vec{v}$.

Prin urmare, $k_1=a_1$, $k_2=a_2$, adică $\vec{a}(a_1;a_2)=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$.

Observație Vectorii $\vec{e}_1(1;0)$ şi $\vec{e}_2(0;1)$ se numesc **vectori unitari**.

2.5. Produsul scalar a doi vectori (opțional)

Produsul scalar al vectorilor $\vec{a}(a_1;a_2)$ şi $\vec{b}(b_1;b_2)$ este numărul $a_1b_1+a_2b_2$, notat $\vec{a}\cdot\vec{b}$.



Exemple

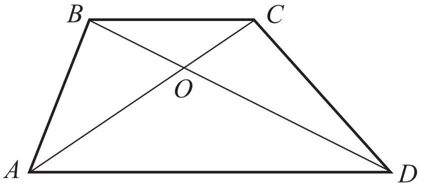
1. Produsul scalar al vectorilor $\vec{a}(1;-4)$ şi $\vec{b}(2;3)$ este numărul $1\cdot 2+(-4)\cdot 3=-10$.
   Deci, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-10$.
2. Să calculăm produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ din desenul 1.
   Rezolvare:
   Avem $A(-3;-2)$, $B(-2;4)$, $C(4;3)$, $D(2;6)$.
   $\overrightarrow{AB}(-2-(-3);4-(-2))=\overrightarrow{AB}(1;6)$, $\overrightarrow{CD}(2-4;6-3)=\overrightarrow{CD}(-2;3)$.
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=1\cdot(-2)+6\cdot 3=16$.
   Răspuns: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=16$.

Observații

1. Dacă direcțiile a doi vectori sunt perpendiculare, atunci produsul lor scalar este egal cu 0.
2. Dacă produsul scalar a doi vectori este 0, atunci direcțiile lor sunt perpendiculare.
3. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|,$ pentru orice vector $\vec{a}$.

Exerciții și probleme

1 ☐ ☐



1. Examinați desenul și aflați:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD};$

b) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA};$

c) $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OD}.$

2. Examinați desenul problemei precedente și aflați:

a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{OD};$ b) $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BO};$ c) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DO},\ \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BO}.$

3. Fie vectorii $\vec{a}(-3;\sqrt{5}),\ \vec{b}(0{,}8;-6).$ Aflați coordonatele vectorului:

a) $\vec{a}+\vec{b};$ b) $\vec{b}-\vec{a};$ c) $2\vec{a};$ d) $0{,}5\vec{b};$ e) $3\vec{a}-2\vec{b}.$

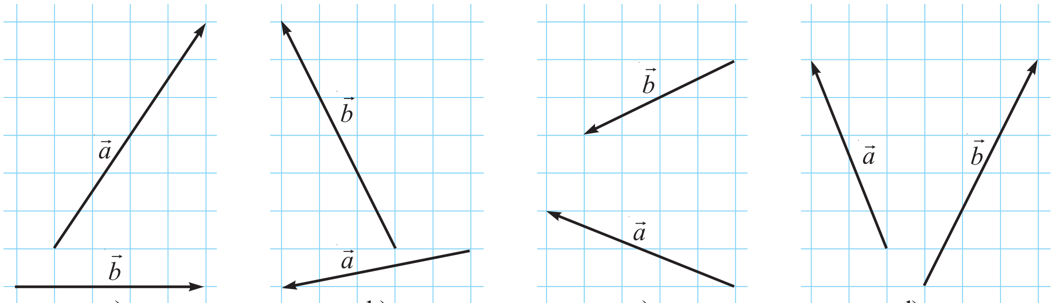
4. Fie vectorii $\vec{a}(12;16),\ \vec{b}\left(\frac{2}{3};-9\right).$ Aflați coordonatele vectorului:

a) $\vec{a}+\vec{b};$ b) $\vec{a}-\vec{b};$ c) $0{,}25\vec{a};$ d) $3\vec{b};$ e) $6\vec{b}+2\vec{a}.$

5. Fie vectorii $\vec{a}(2;1),\ \vec{b}(-1;3).$ Aflați modulul vectorului:

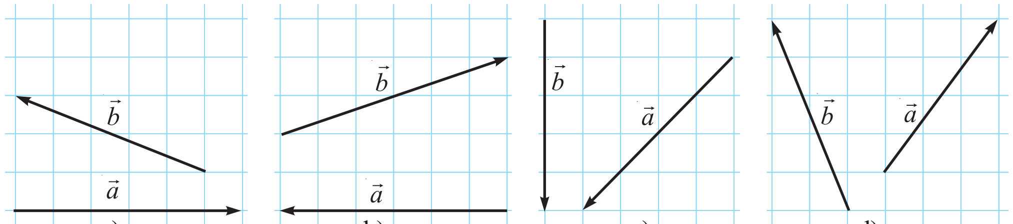
a) $2\vec{a}+\vec{b};$ b) $\vec{a}-2\vec{b};$ c) $3\vec{a}-3\vec{b};$ d) $-5\vec{a}+4\vec{b}.$

6. Reproduceți desenul, apoi construiți suma vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$.



a) b) c) d)

7. Reproduceți desenul, apoi construiți diferența $\vec{a}-\vec{b}$.



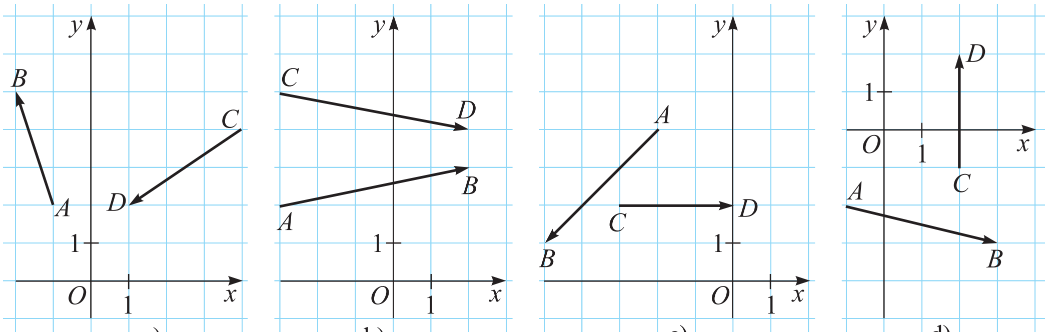
a) b) c) d)

8. Pentru fiecare din desenele problemei 7 construiți vectorii $2\vec{a}$ și $-2\vec{b}$.

9 (opțional). Calculați produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$, dacă:

a) $\vec{a}(3;1),\ \vec{b}(0;5);$ b) $\vec{a}(2;-4),\ \vec{b}(6;2);$ c) $\vec{a}(\sqrt{2};3),\ \vec{b}(3\sqrt{2};1);$ d) $\vec{a}\left(-8;\frac{2}{3}\right),\ \vec{b}\left(\frac{3}{4};9\right).$

10 (opțional). Examinați desenul. Calculați produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$:



a) b) c) d)

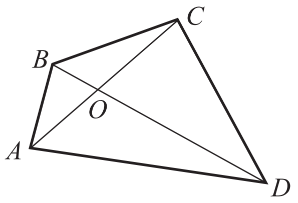
☐ **2** ☐

11. Examinați desenul și aflați:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$;

b) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$;

c) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$.



12. Punctele M și N sunt respectiv mijloacele laturilor AB și AC ale triunghiului ABC.
Completați: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\square$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\square$. Prin urmare, $2\overrightarrow{MN}=\square$.

13. Determinați vectorul $\vec{x}$, știind că:

a) $\vec{x}+\vec{a}(-5;3)=\vec{b}(3;2)$;
b) $\vec{a}(-1;6)-2\vec{x}=\vec{b}(9;10)$;
c) $3\vec{x}+\vec{a}(4;8)=\vec{b}(-8;23)$;
d) $\vec{a}(7;13)+\vec{x}=2\vec{x}-\vec{b}(0;5)$.

14. Determinați dacă punctele A, B și C sunt coliniare, știind că:

a) $A(5;4)$, $B(2;2)$, $C(11;8)$;
b) $A(10;-2)$, $B(-3;1)$, $C(2;0)$;
c) $A(-5;-2)$, $B(10;3)$, $C(4;1)$;
d) $A(6;0)$, $B(2;3)$, $C(-1;-1)$.

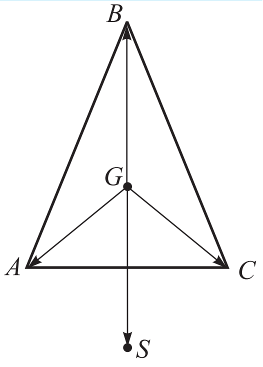
15. Aflați valoarea lui m pentru care direcțiile vectorilor $\vec{a}(3;2)$ și $\vec{b}(m-1;6-2m)$ sunt perpendiculare.

16. Demonstrați că dreptele AB și CD sunt perpendiculare, știind că:

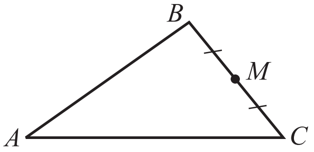
a) $A(-1;2)$, $B(-2;5)$, $C(1;2)$, $D(4;3)$;
b) $A(2;3)$, $B(-3;2)$, $C(-3;3)$, $D(-2;0)$;
c) $A(-2;4)$, $B(-5;1)$, $C(-3;2)$, $D(0;-1)$;
d) $A(3;-3)$, $B(-1;-2)$, $C(2;-1)$, $D(3;3)$.

☐ ☐ **3**

17. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului isoscel ABC cu baza AC, iar S – un punct, astfel încât $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GS}$. Demonstrați că $AGCS$ este un romb.



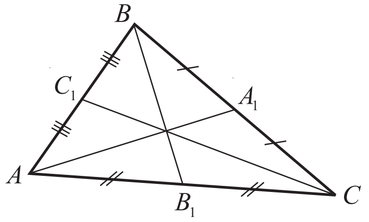
18. Demonstrați că pentru orice vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ are loc relația $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$.



19. Punctul M este mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Demonstrați că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$. (*Indicație*. „Completați” triunghiul ABC până la un paralelogram.)

20. Punctul M este punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Demonstrați că $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

21. Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor triunghiului ABC (vezi desenul). Demonstrați că $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=0.$



22. Demonstrați că pentru orice triunghi ABC există alt triunghi cu laturile paralele şi congruente respectiv cu medianele triunghiului ABC. (*Indicație*. Utilizați observația 2 din secvența 2.1.)

23. Aflați vectorii $\vec{x}$ şi $\vec{y}$, dacă:

a) $\begin{cases}\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}(-2;\ 6);\\ 2\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}(5;\ 0);\end{cases}$ b) $\begin{cases}\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}(-3;\ 7);\\ 3\vec{x}+2\vec{y}=\vec{b}(16;\ 1);\end{cases}$

c) $\begin{cases}-\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}(12;\ -3);\\ 4\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}(-6;\ -2).\end{cases}$

24. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC. Demonstrați că $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

(*Indicație*. Utilizați relația din problema **21** şi relația $\overrightarrow{GA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MA},$ unde M este mijlocul laturii BC.)

25. Fie $ABCD$ un paralelogram. Completați:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$ ▭ . (1)

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=$ ▭ . (2)

Ridicând fiecare dintre relațiile (1) şi (2) la pătrat, obținem:

$\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2=$ ▭ . (3)

$\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2=$ ▭ . (4)

Adunând relațiile (3) şi (4), obținem

$2AB^2+2AD^2=$ ▭ .

26. Demonstrați că pentru orice numere reale nenule a, b, c direcția vectorului $\vec{v}(a,\ b)$ este perpendiculară pe dreapta $ax+by=c$.

Exerciții și probleme recapitulative

1 ☐ ☐

1. Aflați imaginile punctelor A, B, C la translația definită de formulele $x_1=x+4$ şi $y_1=y-3$, dacă:

a) $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, $C(-1;\ 3)$;

b) $A(1;\ 3)$, $B(-1;\ 7)$, $C(2;\ -6)$;

c) $A(4;\ 4)$, $B(12;\ 5)$, $C(0;\ 8)$.

2. Scrieți formulele translației care „trece”:

a) punctul $A(4;\ 10)$ în punctul $A_1(10;\ 4)$;

b) punctul $B(-5;\ 8)$ în punctul $B_1(8;\ 2)$;

c) punctul $O(0;\ 0)$ în punctul $O_1(7;-6)$.

3. La o translație, punctul $A(0;\ -1)$ „trece” în punctul $A_1(1;\ 3)$. În ce punct „trece”:

a) punctul $B(2;\ 4)$;

b) originea sistemului de axe ortogonale;

c) punctul $C(5;\ 4)$;

d) simetricul punctului $D(3;\ 2)$ față de $O(0;\ 0)$?

4. Aflați lungimea segmentului AB, dacă:

a) $A(7;\ 4)$, $B(3;\ 1)$; b) $A(5;\ 2)$, $B(-1;\ 2)$;

c) $A(4;\ -1)$, $B(8;\ 2)$; d) $A(4;\ 3)$, $B(0;\ 1)$.

5. Aflați coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$, dacă:

a) $A(5;\ 3)$, $B(5;\ 4)$; b) $A(0;\ -9)$, $B(1;\ 1)$;

c) $A(0;\ 8)$, $B(-8;\ 0)$; d) $A(10;\ -3)$, $B(2;\ 1)$.

6. Fie punctele $A(2;\ 1)$, $B(4;\ 5)$ şi $C(1;\ -3)$. Aflați coordonatele punctului D, ştiind că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

7. Aflați modulul vectorului AB, ştiind că:

a) $A(1;\ 0)$, $B(2;\ 1)$; b) $A(-4;\ 3)$, $B(6;\ 27)$;

c) $A(9;\ -9)$, $B(18;\ 3)$; d) $A(-17;\ -22)$, $B(1;\ 58)$.

8. Aflați opusul vectorului de coordonate:

a) $(5;\ 3)$; b) $(-7;\ 2)$; c) $(6;\ 8)$; d) $(0;\ -25)$.

9. Determinați coordonatele vârfului vectorului care are:

a) originea $A(3;\ 3)$ şi coordonatele $(1;\ -1)$;

b) originea $B(5;\ 0)$ şi coordonatele $(-2;\ 7)$;

c) originea $C(-4;\ 9)$ şi coordonatele $(3;\ -4)$;

d) originea $D(9;\ -4)$ şi coordonatele $(-5;\ 0)$.

10. Calculați suma vectorilor:

a) $(6;\ 2)$ şi $(-5;\ 4)$; b) $(16;\ 2)$ şi $(1;\ -1)$;

c) $(4;\ 8)$ şi $(4;\ -3)$; d) $\left(\frac{3}{4};\ 0\right)$ şi $\left(-\frac{1}{2};\ 7\right)$.

11. Aflați diferența vectorilor din exercițiul 10.

12. Aflați produsul scalar al vectorilor din exercițiul 10.

13. Fie $A(3; 2)$, $B(-5; 3)$.

a) Aflați coordonatele vectorilor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, unde $O(0; 0)$.

b) Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

c) Aflați coordonatele vectorilor $2\overrightarrow{AB}$, $0{,}5\overrightarrow{OA}$, $4\overrightarrow{AB}$.

14. Fie rombul $ABCD$. Determinați:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$;
b) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}$;
c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$;
d) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$.

☐ **2** ☐

15. Aflați valoarea lui x, dacă:

a) $\vec{a}=(x; 10)$ și $|\vec{a}|=26$;

b) $\vec{a}=(10; x)$ și $|\vec{a}|=12{,}5$;

c) $\vec{a}=(x; 8)$ și $|\vec{a}|=4\sqrt{13}$;

d) $\vec{a}=(-9; x)$ și $|\vec{a}|=3\sqrt{13}$.

16. Fie $\overrightarrow{AB}(3; -2)$, $\overrightarrow{BC}(-4{,}5; 3)$. Demonstrați că punctele A, B, C sunt coliniare.

17. Stabiliți dacă sunt coliniari vectorii:

a) $\vec{a}(1; -3)$, $\vec{b}(1; 3)$;
b) $\vec{a}(0; -1)$, $\vec{b}(1; 0)$;
c) $\vec{a}(3; -2)$, $\vec{b}(-3; 2)$;
d) $\vec{a}(4; -2)$, $\vec{b}(-2; 1)$.

18. Fie punctele $A(1; -2)$, $B(-1; 1)$, $C(2; 3)$. Aflați lungimile laturilor triunghiului.

19. Pentru care valoare a lui x sunt perpendiculari vectorii:

a) $\vec{a}(3; 2)$, $\vec{b}(x; -1)$;
b) $\vec{a}(5; x)$, $\vec{b}(0; -3)$;
c) $\vec{a}(x; -6)$, $\vec{b}(4; 5)$?

☐ ☐ **3**

20. Fie $A(-1; 2)$, $B(1; -2)$, $C(2; 0)$, $D(1; 6)$.

a) Demonstrați că $AD \parallel BC$.
b) Aflați aria lui $ABCD$.

21. Fie punctele $A(3; 5)$, $B(-3; 1)$. Aflați coordonatele punctului C de pe axa Ox, dacă se știe că triunghiul ABC este isoscel cu baza $[AB]$.

22. Determinați tipul triunghiului ABC (după laturile lui), dacă:

a) $A(-1; -1)$, $B(6; 0)$, $C(2; 3)$;
b) $A(3; -1)$, $B(1; 2)$, $C\left(2+\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)$.

23. Determinați tipul patrulaterului $ABCD$, dacă:

a) $A(3; 2)$, $B(8; 6)$, $C(3; 6)$, $D(8; 2)$;
b) $A(6; 0)$, $B(5; 6)$, $C(1; 3)$, $D(2; -3)$.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta 1

1. Imaginea punctului $A(7; -4)$ la o translație este punctul $A_1(1; 3)$. Aflați imaginea punctului $B(-3; 5)$.

2. Calculați modulul vectorului cu originea $A(-9; 20)$ și vârful $B(3; -15)$.

3. Stabiliți dacă punctele $A(12; 2)$, $B(-8; -2)$, $C(2; 0)$ sunt coliniare.

4. Punctele $A(-2; 1)$, $B(1; -4)$, $C(6; -3)$ sunt vârfuri ale paralelogramului $ABCD$. Aflați coordonatele punctului D.

Varianta 2

1. Imaginea punctului $A(-3; 6)$ la o translație este punctul $A_1(7; 2)$. Aflați imaginea punctului $B(-1; 8)$.

2. Calculați modulul vectorului cu originea $A(20; -3)$ și vârful $B(-4; 4)$.

3. Stabiliți dacă punctele $A(-2; 10)$, $B(4; -5)$, $C(2; 0)$ sunt coliniare.

4. Punctele $A(8; 4)$, $B(-2; 3)$, $C(4; -1)$ sunt vârfuri ale paralelogramului $ABCD$. Aflați coordonatele punctului D.

Răspunsuri și indicații

Algebră

Capitolul 1. Numere reale. Recapitulare și completări

§1. **1.** De exemplu, $-\sqrt{25}\in\mathbb{R}$, $-\sqrt{25}\in\mathbb{Z}_{-}$, $-\sqrt{25}\in\mathbb{Q}_{-}$, $-\sqrt{25}\in\mathbb{R}_{-}$. **2.** a) F; b) F; c) F; d) A; e) A; f) F; g) A; h) A. **5.** a) F; b) F; c) F; d) F; e) A; f) A. **7.** a) 7,8; b) 6; d) 5,48; f) $\sqrt{22}$. **8.** $-4{,}5$; $-\sqrt{20}$; -1; $\sqrt{9}$; 3,27; $|4{,}28|$; $|-6{,}(2)|$. **10.** a) $\mathbb{Z}$; c) $\mathbb{I}_{-}$; d) $\mathbb{Q}$; e) $\mathbb{N}$; f) $\{0\}$. **12.** a) $\sqrt{19}-4$; b) $\sqrt{10}-2$; c) $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$; d) $\sqrt{22}-3\sqrt{2}$. **13.** b) $\begin{cases}1-x, \text{ dacă } x\le 1\\ -1+x, \text{ dacă } x>1;\end{cases}$ c) $\begin{cases}3x-6, \text{ dacă } x\ge 2\\ -3x+6, \text{ dacă } x<2.\end{cases}$ **15.** 2) a) $\left\{x \,\middle|\, -1\frac{2}{5}<x<2\right\}$; c) $\{x\,|-6{,}5<x<\sqrt{10}\}$; e) $\{x\,|-2<x<5\}$; f) $\{x\,|\,x<\sqrt{2}$ sau $x>\sqrt{5}\}$. **17.** 28. **18.** *Indicație*. Aplicați formulele $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$. **20.** a) „=”; b) „>”; c) „=”; d) „<”. **22.** 18.

§2. **2.** 2) 350; 5) 642; 14,4; 6) 0,225; 1035; 14,4. **4.** a) $D_{108}=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108\}$; c) $(108, 54)=54$; d) $[108, 54]=108$. **5.** b) $-81{,}4$. **7.** a) -1 şi 0; b) 3 şi 4; c) 5 şi 6; d) -23 şi -22. **9.** 3 761 de plăci. **12.** c) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$; d) $0{,}5\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}$. **14.** $4{,}77888\cdot 10^{24}$ kg. **17.** a) De exemplu, $(4+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})$; d) de exemplu, $2\sqrt{15}+\sqrt{15}$; e) de exemplu, $(-1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})$. **19.** a), b) *Indicație*. Aplicați formulele $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ şi $\sqrt{x^2}=|x|$, $x\in\mathbb{R}$. **20.** a), b) *Indicație*. Aplicați formulele $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ şi $\sqrt{x^2}=|x|$, $x\in\mathbb{R}$. **21.** a) $S=\{1{,}5;\ 1;\ -2\sqrt{5}\}$. **22.** 1480 lire. **23.** *Indicație*. Aplicați formulele $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ şi $\sqrt{x^2}=|x|$, $x\in\mathbb{R}$.

§3. **4.** a) x^{12}; b) a^8; c) $64y^5$; d) a^5b^{11}. **7.** e) $\frac{25}{4}$; f) 9. **17.** a) 12; b) $9\frac{1}{4}$; c) $5\frac{29}{64}$; d) $-7\frac{1}{12}$. **18.** a) 2; b) 4; c) 6; d) 5; e) 10; f) $\frac{1}{9}$; g) 3. **19.** a) $x^{-2}y$; b) a^4b^4; c) 1; d) $1{,}25ab^2$. **20.** c) $\left(\frac{2y^2}{x}\right)^{-5}$; d) $(5a^{-5}b^{-1})^3$. **22.** ≈ 5974 ani. **23.** 5,34 kg. **24.** a) x^5; b) x^4; c) x^3; d) x^{13}. **25.** a) $2\frac{1}{3}$; b) $\frac{3}{5}$. **26.** a) ab; b) $\frac{a}{b}$; c) a^3b^3; d) $\frac{a^2}{b^3}$. **28.** a) $\frac{y-x}{x^2y^2}$; b) $x+y$; c) $\frac{1+a}{1-a}$; d) $\frac{a-1}{a}$. **29.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

§4. **3.** c) 9; d) 6. **4.** a) 1) $\approx 3{,}5$; 2) $\approx 3{,}46$; 3) $\approx 3{,}464$. **6.** a) $a\ge 0$; b) $a\ge -2$; c) $a\le 1$; d) $a\ge 1$. **7.** a) 2 şi 3; b) 4 şi 5; c) 6 şi 7; d) 12 şi 13. **9.** a) 1; b) 0; c) 5; d) 7. **11.** a) 44; b) 35; c) 7,2; d) $\frac{6}{13}$; e) $\frac{4}{45}$; f) 51. **12.** a) 36; b) 60; c) 42; d) 135; e) 5; f) 15. **13.** a) $6\sqrt{2}$; b) $4\sqrt{3}$; c) $5\sqrt{3}$; d) $3\sqrt{10}$; e) $\sqrt{6}$; f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **14.** a) $\sqrt{45}$; b) $\sqrt{75}$; c) $\sqrt{28}$; d) $-\sqrt{18}$; e) $\sqrt{108}$; f) $\sqrt{3}$. **16.** 14 mm. **17.** a) $x\in[0;+\infty)$; b) $x\in(-\infty;0)$; c) $x\in(0;+\infty)$; d) $x\in\mathbb{R}$; e) $x\in\mathbb{R}^*$; f) $x\in\varnothing$; g) $x\in[1;+\infty)$; h) $x\in\mathbb{R}$. **19.** a) 1; b) 6. **20.** a) $2\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}$; c) $7+2\sqrt{3}$; d) 1. **22.** a) 2,38; b) 0,123; c) 26,32; d) 3,504. **25.** a) 1,2; b) 20; c) 40; d) 70. **26.** a) $\sqrt{11}$; b) 1; c) 3; d) $\frac{2}{19}$. **27.** a) $\sqrt{15}$; b) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; c) $\sqrt{11}+1$; d) $\sqrt{7}-1$. **28.** a) $-4ab^5\sqrt{2a}$; b) $-2(a-3)\cdot\sqrt{-2(a-3)}$. **29.** a) $-\sqrt{3a^2}$; b) $\sqrt{x^3}$; c) $-\sqrt{-y^3}$; d) $\sqrt{(a-b)^3}$. **30.** a) $-\frac{a^4b^6}{c}$; b) x^2y^8; c) $\sqrt{3}$. **32.** $\sqrt{2012}+\sqrt{2014}<2\sqrt{2013}$. **33.** a) 4; b) $2\sqrt{5}$. **34.** a) $\sqrt{6}-1$; b) $2+\sqrt{3}$.

Exerciții şi probleme recapitulative

2. a) a^{-14}; b) x^3. **4.** a) 180; b) 21; c) 3. **5.** a) $9\sqrt{5}$; b) $7-4\sqrt{3}$; c) 1; d) $11-22\sqrt{2}$. **6.** a) $-6xy\sqrt{y}$; b) $\frac{a^3}{5b}$. **9.** $x\in(-\infty;0)$; $y\in(-\infty;0)$. **10.** $a=0$ şi $b\in[0;+\infty)$ sau $b=0$ şi $a\in[0;+\infty)$. **11.** a) $\sqrt{\frac{a}{b}}$; b) $\frac{2}{\sqrt{b}}$. **12.** a) $\frac{2b^2+a}{a^2b^4}$; b) $\frac{a^4}{1+2a^2+a^4}$. **14.** 1. **15.** a) 0; b) 0. **16.** 2.

Capitolul 2. Calcul algebric

§1. **3.** a) $9{,}5\sqrt{7}+12\sqrt{3}-7\sqrt{10}$; b) $\sqrt{15}+16\sqrt{2}$. **4.** a) $-\frac{17{,}8}{4}a+\frac{13}{5}b+\sqrt{7}$; b) $-1+6ab^2-100ab$. **5.** a) $4{,}12x^2y=4x^2y+0{,}12x^2y$; b) $-3\sqrt{2}tz=-\sqrt{2}tz-\sqrt{2}tz-\sqrt{2}tz$; c) $6{,}(15)ab=6ab+0{,}(15)ab=6ab+\frac{5}{33}ab$; d) $-\frac{2}{7}xy^2=-\frac{1}{7}xy^2-\frac{1}{7}xy^2$. **6.** a) $-21x^3y^4z^4$; b) $14a^4b^2$. **7.** a) $13xy^{-1}$; b) $-\frac{1}{3}a^{-1}b^2$; c) $-\sqrt{3}tz$; d) $4{,}6a^{-1}b$. **8.** a) $9x^2y^4$; b) $25a^8b^4$; c) $-\frac{125}{1331t^3z^3}$. **9.** a) F; b) F; c) F; d) A; e) F; f) F. **10.** a) m^2+mn; b) z^2-zy; c) $3ab-6ac$; d) $-2\sqrt{2}x+2y$; e) $1{,}7x^2+5{,}1xy$; f) $\sqrt{14}a+7$. **11.** a) $-12x^3y^6+32x^2y^2z$; b) $-65a^3b^4+130a^2b^2c$; c) $-\sqrt{98}t^2z+\sqrt{147}t^3z^3$; d) $12a^3b^3-10a^2b$. **12.** a) 9 cm^2; b) 19 cm^2. **13.** a) $10x^2-21y^2-xy-2x+3y$; b) a^3-b^3; c) a^3+b^3; d) $x^3+x^2y-y^2x-y^3$. **14.** a) $7ab(b+2a)$; b) $-0{,}8x^2y^3(4{,}5-x^2y^2)$; c) $\sqrt{17}xy(2y^3-x)$; d) $-tz(15z+\sqrt{5}t)$. **16.** a) $7x^2y-3\sqrt{7}x^2+2\sqrt{7}xy-xy+y^2-7x^2y^2$; b) $\frac{5x^4y-245+x^6y^2-x^4y^6}{7}$. **18.** a) $-6a$; b) $-100x$. **20.** Al doilea şahist. **21.** a) $x\cdot x\cdot(x^2-1{,}7x+0{,}7)$. **22.** $2\sqrt{3}$. **23.** a) 5; b) –2; c) 0; d) 1. **24.** a) F; b) A. **25.** a) 3,5 km; b) 7 km; c) 10,5 km; d) 14 km. **29.** a) $S=\{0;\ 4\}$; b) $S=\{0;\ 1\}$. **31.** $\sqrt{a+1}-1$.

§2. **4.** a) F; b) F; c) A; d) F. **5.** a) $(\sqrt{3}+2x)^2=3+4\sqrt{3}x+4x^2$; b) $(2{,}5x+\sqrt{2}y)^2=6{,}25x^2+2\cdot2{,}5x\cdot\sqrt{2}y+2y^2$; c) $(a^2-2b^3)^2=a^4-4\cdot a^2\cdot b^3+4b^6$; d) $(t^2-\sqrt{3}z^4)^2=t^4-2\cdot t^2\cdot\sqrt{3}z^4+3z^8$. **6.** a) $(x-\sqrt{11})^2=x^2-2\sqrt{11}x+11$; b) $(-x-\sqrt{11})^2=x^2+2\sqrt{11}x+11$; c) $(-x+\sqrt{11})^2=x^2-2\sqrt{11}x+11$; d) $(x+\sqrt{11})^2=x^2+2\sqrt{11}x+11$; e) $(\sqrt{11}-x)^2=11-2\sqrt{11}x+x^2$; f) $(\sqrt{11}+x)^2=11+2\sqrt{11}x+x^2$. **8.** a) A; b) F; c) F; d) A. **15.** a) 10; b) $8\sqrt{10}+18$. **18.** a) $(120+40\sqrt{5})$ cm^2; b) $(24+6\sqrt{15})$ cm^2; c) $(645-100\sqrt{5})$ cm^2; d) $(10\,200-1\,000\sqrt{8})$ cm^2. **19.** a) 44 cm^2; b) 90 cm^2. **31.** b) 0, 1 sau 4. **32.** a) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **38.** a) 2; b) 2.

§3. **1.** a) $(x-5)^2$; b) $(4a-1)^2$; c) $(6ab+1)^2$; d) $(x+8)^2$; e) $(8xy-1)^2$; f) $(1+9x)^2$. **2.** a) A; b) A; c) F; d) F. **4.** a) $(1+x)^3$; b) $(4a+b)^3$; c) $(10+t)^3$; d) $(x+2y)^3$. **5.** a) $13(2xy-3z)$; b) $-11xy(11x-y)$; c) $2{,}5a^3b^2(5-a)$; d) $\sqrt{2}t(2t-5)$. **6.** a) $a^3(6+a^2b)(36-6a^2b+a^4b^2)$; b) $x^6(5+x^2y)(25-5x^2y+x^4y^2)$; c) $t^3(3+z)(9-3z+z^2)$. **7.** a) $a^3(b-a)(b^2+ab+a^2)$; b) $t^3(t^4-2z)(t^8+2zt^4+4z^2)$; c) $x^3y^3(x-y)(x^2+xy+y^2)$. **8.** a) $(a-\sqrt{7})(a+\sqrt{7})(a+\sqrt{5})$; b) $(xy-2)(3x-y)$. **9.** a) $4tz$; b) $a(a-b)(a+b)$; c) $(x^2+5)(x+1)(x-1)$; d) $(x-y)^2(x+y)^2$. **10.** a) $(x-3)(x-1)$; b) $(x+6)(x+4)$; c) $a(a-2b-3)$; d) $a^2(b-2)(b-3)$. **13.** 5. **14.** a) $13=7^2-6^2$. **15.** a) 0; b) 4; c) 0; d) –5. **17.** a) $x^{-3}(3+4x^{-1}y)(9-12x^{-1}y+16x^{-2}y^2)$; b) $t^3(8t^3+0{,}1z^2)(64t^6-0{,}8t^3z^2+0{,}01z^4)$. **18.** a) $t^3z^{-9}(2t^2z-1)(4t^6z^2+2t^3z+1)$; b) $a^{15}(9a^2b^3-0{,}2)(81a^4b^6+1{,}8a^2b^3+0{,}04)$. **19.** 11 şi 12. **22.** a) $(t^2+t+1)^2$; b) $(x^2+3x+1)^2$.

§4. **1.** a) Da; b) nu; c) da; d) nu. **4.** a) $m-n$; b) $5(x-2)$; c) $5(a-1)$; d) $4m-n$. **5.** a) 10; b) $2mn+m^2+8$; c) $-2a-10b$; d) $4t+1$. **7.** a) Nu; b) da; c) nu; d) da. **8.** a) $2x^2-21xy-2y^2$; b) m^2-9n^2; c) $5x^2+24x+17$; d) $2(t^2+1)$; e) $3x^2-16$; f) $3z-7$. **9.** a) 1) $a\in\mathbb{R}\setminus\{-8\}$; 2) $E(x)=a-8$; b) 1) $x\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$; 2) $E(x)=x+5$; c) 1) $t\in\mathbb{R}\setminus\{\pm10\}$; 2) $E(t)=\frac{2}{t+10}$. **11.** a) $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm2\}$; b) $E(x)=\frac{a-c}{x-2}$.

Exerciții şi probleme recapitulative

1. a) $7{,}5xy+25$; b) $14{,}75a^2b^3-3{,}6ab-0{,}7$; c) $-5a^2-28a-15$. **2.** a) A; b) F; c) F. **4.** a) 1; b) 8. **5.** a) $(x+5)(x-5)$; b) $(2+9t)(2-9t)$; c) $(2+a)(4-2a+a^2)$; d) $(c+2x)(c^2-2xc+4x^2)$. **6.** a) a^9-1; b) m^3-1. **8.** a) $S=\left\{-\frac{5}{2};\ \frac{5}{2}\right\}$; b) $S=\{-8;\ 8\}$; c) $S=\{-0{,}6;\ 0{,}6\}$; d) $S=\{-10;\ 10\}$. **15.** a) $(a-b)(1-a-b)$; b) $(x+y)(x-y-1)$; c) $(x+y)(1-x^2+xy-y^2)$; d) $(a-b)(a^2+ab+b^2-1)$. **16.** a) $\frac{(x-1)^2}{x^3+1}$; b) $-\frac{x}{x^2+x+1}$. **17.** a) $(3x+1)(21x^2-6x+1)$; b) $(t+1)\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t+1\right)$; c) $-z(z+2)(z^2+z+1)(z^2+3z+3)$. **23.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(\sqrt{3})^2$. **24.** $12\,098^3$.

Capitolul 3. Ecuații și inecuații. Sisteme

§1. **5.** a) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$; b) $S=\{5\}$; c) $S=\{5\}$; d) $S=\{10,5\}$. **6.** a) $S=\{2\sqrt{3}\}$; b) $S=\varnothing$. **7.** a) $S=\{1,2\}$; b) $S=\varnothing$. **8.** a) $x=10$; b) $x=3$; c) $x=35$. **11.** $x=7$. **12.** $y=3$. **13.** a) $S=\{5\}$; b) $S=\{2,5\}$; c) $S=\{0\}$; d) $S=\{-3\}$. **16.** a) $S=\{-4;\ 4\}$; b) $S=\{-7;\ 7\}$; c) $S=\{3\}$; d) $S=\varnothing$. **17.** 2 kg. **18.** 4 km/h. **19.** a) $S=\{-2;\ 5\}$; b) $S=\{3;\ 4\}$; c) $S=\left\{\frac{2}{3};\ 2\right\}$; d) $S=[11;\ +\infty)$. **20.** 16 km/h, 20 km/h; 12 km. **21.** 350 de lei.

§2. **4.** a) $y=-2x+5$; b) $x=-0{,}5y+2{,}5$. **6.** $y=-0{,}2$. **8.** a) Nu; b) nu; c) da; d) nu. **9.** a) $S=\{(4;\ 2)\}$; b) $S=\{(0;\ 4)\}$; c) $S=\{(4;\ 2)\}$; d) $S=\{(5;\ 1)\}$. **10.** a) $S=\{(2;\ 9)\}$; b) $S=\{(1;\ 3)\}$; c) $S=\{(2;\ 7)\}$; d) $S=\{(5;\ 2)\}$. **11.** a) $S=\{(3;\ 7)\}$; b) $S=\{(2;\ 5)\}$; c) $S=\{(2;\ 0)\}$; d) $S=\varnothing$. **13.** $b=3$. **14.** $a=3$. **17.** a) $S=\{(3;\ 2)\}$; b) $S=\{(6;\ 1)\}$; c) $S=\{(0{,}2;\ 0{,}4)\}$; d) $S=\{(6;\ 12)\}$. **19.** 1,6 kg de orez; 2,4 kg de mei. **20.** 35 de ani; 9 ani. **21.** 6 camere cu 2 paturi; 10 camere cu 3 paturi. **22.** Câte 600 de lei. **23.** 8 milioane de lei; 5 milioane de lei. **24.** a) 256 lei 50 bani; b) 313,5 lei. **25.** a) $S=\{(2;\ 3)\}$; b) $S=\{(-2;\ 4)\}$. **26.** $m=3$. **27.** $a=-3$. **28.** Porțiunea BC – 24 de automobile; porțiunea BD – 12 automobile; porțiunea DE – 14 automobile; porțiunea CE – 22 de automobile. **29.** a) 8 milioane de lei; 5 milioane de lei; b) 14 milioane de lei; 12 milioane de lei. **30.** 10 *l* cu concentrația de 20%; 20 *l* cu concentrația de 50%.

§3. **2.** a) $[-4{,}5;\ \sqrt{5})$; $(0;\ 2)$; d) $(\sqrt{7};\ 2013)$; $\{15\}$. **6.** a) $\{-1;\ 0\}$; b) $\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$; c) $\{2;\ 3\}$. **9.** a) $S=[3;\ +\infty)$; b) $S=(-\infty;\ 10)$; c) $S=\left(-\infty;\ -\frac{3}{7}\right]$; d) $S=[-9;\ +\infty)$. **11.** a) $S=(-\infty;\ -3)$; b) $S=\left[-\frac{6}{11};\ +\infty\right)$; c) $S=\left(-\infty;\ -\frac{5}{9}\right]$; d) $S=\varnothing$; e) $S=(3;\ 6]$. **12.** c) $[-1{,}7;\ 0)\cup(-1;\ \sqrt{7}]$; d) $[-\sqrt{11};\ -\sqrt{3}]\cup[\sqrt{2};\ \sqrt{21}]$. **13.** c) $A\cup B=\mathbb{Z}$; $A\cap B=\{-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$; $A\setminus B=\mathbb{Z}\setminus\{-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$; $B\setminus A=B\setminus\mathbb{Z}=[-4,\ 5)\setminus\{-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. **17.** a) $S=\left[1\frac{5}{24};\ +\infty\right)$; b) $S=\left(-\infty;\ -\frac{3}{11}\right)$; c) $S=\left(2\frac{2}{3};\ +\infty\right)$. **18.** a) $x\in\left(-\infty;\ -\frac{13}{15}\right]$; b) $x\in(-\infty;\ 1{,}2)$. **19.** a) $y\in\left(\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; b) $y\in\left(-\infty;\ 72\frac{2}{3}\right]$; c) $y\in\left[-119\frac{1}{3};\ +\infty\right)$. **20.** 0. **21.** a) $x\in[1{,}6;\ +\infty)$; b) $x\in(3{,}75;\ +\infty)$. **22.** a) $S=\varnothing$; b) $S=(-24;\ -1)$; c) $S=\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)$; d) $S=\left(-\frac{1}{5};\ 5\right)$. **23.** a) $x\in\varnothing$; b) $x\in\left[-4;\ \frac{1}{4}\right)$. **24.** d) *Indicație*. Analizați cazurile: $a<b$, $a=b$ şi $a>b$. **25.** a) $a\in(-\infty;\ 0)$; b) $a\in(0;\ +\infty)$; c) $a\in(0;\ +\infty)$; d) $a\in(-\infty;\ 0)$. **26.** $5\pi<l<5{,}2\pi$. **29.** a) $S=(-\infty;\ 4]$; b) $S=(-\infty;\ -3)$; c) $S=(-\infty;\ 1{,}6)$. **30.** 1) $a\in(2;\ +\infty)$; 2) $a=2$; 3) $a\in(-\infty;\ 2)$; 4) $a\in\varnothing$. **31.** a) $S=[-2;\ -1)$; b) $S=(-\infty;\ -3)\cup(3;\ 4]$; c) $S=[-7;\ -5)\cup(5;\ 7]$. **32.** Mai mult de 21 *l*, dar mai puțin de 28,75 *l*. *Indicație*. Pentru a afla temperatura amestecului, folosiți formula mediei ponderate: $t=\frac{V_1\cdot t_1+V_2\cdot t_2}{V_1+V_2}$.

Exerciții şi probleme recapitulative

2. a) 3; b) 5; c) 1; d) –1; e) –1; 0; f) –1. **3.** a) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; b) $\mathbb{R}$; c) $\mathbb{R}_+$; d) $\mathbb{R}$. **4.** a) $S=\varnothing$; b) $S=\{0{,}2\sqrt{5}\}$. **5.** a) $S=\{10\}$; b) $S=\{10\}$. **6.** a) Nu; b) da; c) nu; d) da. **9.** a) Nu; b) da; c) nu; d) nu. **10.** a) $S=\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{6}\right)$; b) $S=\varnothing$; c) $S=(2;\ -1)$. **12.** a) Nu; b) da. **15.** a) –2, –1, 0; b) 0, 1, 2; c) 2, 3. **17.** a) $S=(1{,}5;\ +\infty)$; b) $S=(-\infty;\ 2]$; c) $S=(-\infty;\ -3)$; d) $S=[0{,}5;\ +\infty)$; e) $S=(-2{,}4;\ +\infty)$; f) $S=(-0{,}1\sqrt{10};\ +\infty)$. **18.** a) –2; b) 3, 6; c) 1, 3, 6. **19.** a) $S=[-2,\ 4)$; b) $S=(5;\ +\infty)$; c) $S=(-\infty;\ -2)$. **20.** $t=3$. **21.** a) $S=\{3\}$; b) $S=\{6\}$; c) $S=\{-8{,}2\}$; d) $S=\left\{1\frac{11}{38}\right\}$. **22.** a) Da; b) da; c) nu. **23.** a) $S=\{-5;\ 5\}$; b) $S=\{-3;\ 3\}$; c) $S=\{-2;\ 2\}$; d) $S=\varnothing$. **25.** a) $S=\{(2;\ 2)\}$; b) $S=\{(1;\ 5)\}$; c) $S=\{(1;\ 0)\}$. **26.** $y=3$. **27.** $x=4{,}5$. **29.** 18. **31.** $S=(-\infty;\ 0{,}9]$. **32.** a) $S=[-1{,}5;\ 2]$; b) $S=\left[\frac{1}{4};\ \frac{7}{4}\right)$. **33.** $x\in[-2{,}8;\ 5)$. **35.** a) $S=\left(-5;\ 2\frac{16}{17}\right)$; b) $S=\varnothing$. **36.** a) $S=\left[\frac{1}{3};\ 1{,}5\right)$; b) $S=\left[\frac{1}{6};\ +\infty\right)$; c) $S=[-0{,}25;\ 12{,}5)$. **37.** 12 cm. **38.** 16 bărbați, 32 de femei. **39.** Dana are 7 bomboane, Lenuța – 5 bomboane. **40.** $\mathcal{V}_{\text{vaporului}}=18$ km/h; $\mathcal{V}_{\text{cursului apei}}=2$ km/h. **41.** Primul merge cu 14 km/h, iar al doilea – cu 10 km/h. **42.** Distanța – 1080 km, viteza avionului – 228 km/h. **43.** a) 12 biciclete, 8 automobile; b) 20 de apartamente cu 2 camere, 34 de apartamente cu 3 camere. **44.** $A\cap B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. **45.** $S=\{-6\}$. **46.** $S=\mathbb{R}$. **47.** $m=-\frac{1}{3}$. **48.** Smântână – 210 g, făină – 390 g, zahăr – 170 g, unt – 30 g. **49.** 11 km. **50.** Nu mai puțin de $\frac{2}{3}$ kg şi nu mai mult de $2\frac{4}{5}$ kg.

Capitolul 4. Funcții. Șiruri

§1. **2.** b) $\{2\}$; c) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. **3.** $s(t)=80t$. **4.** $A(x)=8x$. **5.** b) 2) $D(f)=\mathbb{R}$; $E(f)=[0, +\infty)$. **7.** a) $A(2; 3)$, $B(-1; 4)$, $C(4; 0)$, $D(3; -1)$, $E(-2; -2)$. **8.** b) 1) a) ± 2; b) $\pm\sqrt{2}$; c) ± 3. **9.** 1) a) $A \notin G_f$; 2) a) $O \in G_f$; 3) a) $B \notin G_f$. **11.** a) $E(f)=\left\{-\frac{3}{4}; -1; -\frac{3}{2}; -3; 3; \frac{3}{2}; 1; \frac{3}{4}\right\}$. **12.** b) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$; d) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **16.** a) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-2; 6\}$; b) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$. **17.** a) –2; b) 2.

§2. **1.** a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-4x$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2{,}5$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-5$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x-1$. **3.** a) 2; b) –1; c) –1,5; d) 0; e) 0; f) 10. **4.** c) II şi IV; d) I şi III. **5.** a) $\frac{1}{10}$; b) $-\sqrt{3}$; c) 2,1; d) $0{,}5\sqrt{2}$. **6.** a) Nu; b) da; c) nu; d) da. **8.** a) Ascuțit; b) obtuz; c) ascuțit; d) obtuz. **9.** Defineşte o funcție, dar nu este o funcție de gradul I. **10.** Este o proporționalitate directă. **12.** a) $R(x)=50-4{,}5x$; b) $D(R)=\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$. **13.** a) 1) $\frac{1}{5}$; 3) $f(x)>0$ pentru $x\in\left(-\infty; \frac{1}{5}\right)$; $f(x)<0$ pentru $x\in\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$; 4) obtuz; 5) nu este strict crescătoare. **14.** b) 1) 0; 3) $g(x)>0$ pentru $x\in(-\infty; 0)$; $g(x)<0$ pentru $x\in(0; +\infty)$; 4) obtuz; 5) nu este strict crescătoare. **15.** a) $f(x)=-1{,}5x+3$. **16.** b) $f(x)=-0{,}2x$. **19.** $f(x)=x+4$.

§3. **1.** $f(x)=\frac{1}{x}$; $f(x)=\frac{5}{x}$; $f(x)=-\frac{7}{x}$. **4.** a) F; b) A; c) F; d) F; e) F; f) A. **5.** a) II şi IV; b) I şi III. **6.** b) 1) Crescătoare; 2) $f(x)>0$ pentru $x\in(-\infty; 0)$; $f(x)<0$ pentru $x\in(0; +\infty)$; 3) II şi IV. **8.** a) Nu; b) da; c) da; d) nu. **10.** a) $f(x)=-\frac{36}{x}$; b) $f(x)=\frac{32}{x}$.

§4. **1.** $x\in\left\{2{,}25; \frac{100}{9}; 25; 49; 65{,}61\right\}$. **3.** a) F; b) A; c) F; d) F; e) A. **4.** a) Da; b) da; c) da; d) nu. **6.** a) 7; b) 0,2; c) 11; d) 25. **7.** $x\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 99\}$. **11.** a) $S=\{4\}$; b) $S=\{4\}$; c) $S=\{4\}$; d) $S=\varnothing$.

§5. **1.** 1, 3, 5, 7, 9. **2.** 0, 3, 6, 9, 12. **3.** $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$. **4.** a) 2, –1, –4, –7, –10; b) 0, 2, 6, 12, 20; c) 1, $\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}$; d) –3, +3, –3, +3, –3. **5.** a) x_{n-1}, x_n; b) x_{n+2}, x_{n+3}. **6.** $c_3=\frac{3}{4}$, $c_7=\frac{3}{8}$, $c_{100}=\frac{3}{101}$. **8.** 2, 7, 22, 67, 202. **9.** a) 7, 15, 27, 35, 39. **10.** a) –2, +2, –2, +2, –2; b) 0, –1, –2, –3, –4. **11.** b) $b_3=\frac{8}{7}$, $b_7=\frac{128}{15}$, $b_{12}=\frac{4096}{25}$. **12.** c). **13.** a) Da; b) da; c) nu. **14.** 4 termeni negativi. **15.** c) 1, 1, 2, 3, 5; d) 3, 1, –3, –11, –27. **19.** a) $a_1=5$, $a_{n+1}=(-1)^{n+1}a_n$, $n\in\mathbb{N}^*$. **20.** $c_n=(2n-1)^2$, $n\in\mathbb{N}^*$. **22.** Da.

Exerciții şi probleme recapitulative

4. b) $f(1)=f(-2)=f(5)=f(10)=2,(3)$; d) $f(1)=1$; $f(-2)$ nu există; $f(5)=\sqrt{5}$; $f(0{,}1)=\sqrt{0{,}1}$. **5.** a) A; b) F; c) F; d) F. **6.** a) $D(f)=\mathbb{R}_+$; b) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{3\}$; c) $D(f)=\mathbb{R}$; d) $D(f)=[2, +\infty)$; e) $D(f)=\mathbb{R}_+^*$; f) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$. **7.** a) 12; b) –50; c) $-\frac{8}{11}$; d) 10 000. **8.** 2, 1, 4, 2, 8. **9.** a) –1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26. **10.** 17. **12.** $m=4n$. a) 400; b) $D(f)=\mathbb{N}$, $E(f)=\{0, 4, 8, 16, 32, ...\}$. **16.** a) 1) De exemplu, 2; 2) de exemplu, –3; b) 1) de exemplu, $\sqrt{2}$; 2) de exemplu, –1,2; c) 1) de exemplu, 5; 2) de exemplu, –8; f) 1) de exemplu, –2; 2) de exemplu, 7. **18.** a) 1) De exemplu, 3; 2) de exemplu, –5; d) 1) de exemplu, –3; 2) de exemplu, 5. **19.** a) 5; b) 10; c) 12. **20.** a) $x=y=\frac{1}{4}$; b) nu are; c) $x=y=0$; d) $x=y=-\sqrt{5}$. **22.** $x_9=-45$. **23.** Începând cu rangul 21. **24.** a) 64; b) 6. **25.** Nu aparține. **26.** a) $f(f(-2))=20$; $f(f(f(0)))=7$; b) $x=0{,}25$.

Capitolul 5. Ecuații de gradul II cu o necunoscută

§1. **2.** b) Primul coeficient –0,7; coeficientul al doilea –3; termenul liber 0,5. e) Primul coeficient 1; coeficientul al doilea 0; termenul liber 0. f) Primul coeficient $\sqrt{2}$; coeficientul al doilea $-\sqrt{5}$; termenul liber 0. **3.** b) $a=-0{,}5$; $b=-1$; $c=4$; $p=2$; $q=-8$. **8.** a) $2x^2-2x+1=0$; b) $2x^2+(2\sqrt{2}-10)x-1=0$; c) $x^2-10x+1=0$; d) $2x^2+30x-2=0$. **9.** a) De exemplu, $-x^2+2x-1=0$. c) De exemplu, $m^2-2m=0$. d) De exemplu, $-2z^2-5=0$. **10.** a) $x^2+0{,}5x-3=0$; b) $x^2+3x+2=0$; c) $x^2+0x+0{,}25=0$; d) $x^2+\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}=0$. **13.** a) $S=\{1, 3\}$; b) $S=\{-3; -1\}$; c) $S=\{1; 4\}$; d) $S=\{-8; -4\}$. **14.** 11, 12.

§2. **3.** a) $S=\{-3;\ 3\}$; b) $S=\{-11;\ 11\}$; c) $S=\{-5;\ 5\}$; d) $S=\varnothing$. **7.** a) 0; b) 0; c) 0; d) 0. **8.** a) $S=\{-3,\ 3\}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\left\{0;\ \frac{2}{5}\right\}$; d) $S=\{0;\ 2\}$; e) $S=\{-1\}$; f) $S=\varnothing$. **9.** a) $x_1=0,\ x_2=3{,}5$; b) $x_1=0,\ x_2=\frac{1}{6}$; c) $x_1=-1,\ x_2=1$; d) $x_1=0$. **10.** a) $S=\{1\}$; b) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; c) $S=\{3\}$; d) $S=\left\{-\frac{1}{5}\right\}$. **11.** a) $x_1=0,\ x_2=-\frac{1}{3}$; b) $x_1=\frac{1}{2}$. **12.** a) $S=\{-\sqrt{a},\sqrt{a}\mid a\in\mathbb{R}_+\}$; b) $S=\{a\mid a\in\mathbb{R}\}$; c) $S=\{\pm\sqrt{-2b}\mid b\in\mathbb{R}_-\}$; d) $S=\varnothing$.

§3. **2.** a) $S=\{-2;\ \sqrt{7}\}$; b) $S=\{\sqrt{15};\ 4\}$; c) $S=\left\{-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right\}$; d) $S=\{-4;\ 3\}$. **3.** a) $x_1=-1,\ x_2=2$; b) $t_1=3,\ t_2=7$; c) $z_1=-7{,}8,\ z_2=-1{,}2$; d) $x_1=-3,\ x_2=1$. **4.** a) $S=\left\{-\frac{2}{3};\ \frac{1}{2}\right\}$; b) $S=\{-\sqrt{2};\ \sqrt{11}\}$; c) $S=\{\sqrt{7};\ \sqrt{10}\}$; d) $S=\{\sqrt{3};\ \sqrt{5}\}$. **5.** a) $(x+10)(x+6)=0$; b) $(x-3{,}5)(x-1{,}5)=0$; c) $(x-\sqrt{21})[x-(\sqrt{21}+1)]=0$; d) $2(x-4{,}5)(x-4)=0$. **6.** a) $S=\{3;\ 7\}$; b) $S=\{-2;\ -0{,}5\}$; c) $S=\left\{-4;\ -3\frac{24}{25}\right\}$. **7.** a) $x_1=-2,\ x_2=1$; b) $x_1=-10,\ x_2=10$; c) $x_1=-5,\ x_2=-4$; d) $x_1=2,\ x_2=2\frac{1}{6}$. **8.** a) –14; b) 0; c) –70; d) 12. **9.** a) –30; b) 5; c) 25; d) 15. **10.** a) $S=\{-7;\ 3\}$; b) $S=\left\{-\frac{1}{5};\ \frac{3}{5}\right\}$; c) $S=\left\{-\frac{2}{7};\ \frac{4}{7}\right\}$; d) $S=\left\{-\sqrt{3};\ \frac{5\sqrt{3}}{3}\right\}$. **11.** a) Suma este egală cu 0, iar produsul cu $-\frac{4+\sqrt{7}}{2}$; c) suma este egală cu $-\frac{2}{\sqrt{11}}$, iar produsul cu $-10\frac{10}{11}$; d) suma este egală cu $\frac{1}{\sqrt{5}}$, iar produsul – cu $-31\frac{1}{5}$.

§4. **2.** a) $S=\{-4;\ 2\}$; b) $S=\{-2;\ 14\}$; c) $S=\{-1;\ 3\}$; d) $S=\left\{-3;\ \frac{7}{3}\right\}$. **3.** a) 36; b) 256; c) 256; d) 2304; e) 1; f) –4. **4.** a) –; b) +; c) –; d) +. **6.** a) $S=\{-4;\ 2\}$; b) $S=\{-2;\ 14\}$; c) $S=\{-1;\ 3\}$; d) $S=\left\{-3;\ \frac{7}{3}\right\}$; e) $S=\left\{\frac{1}{5}\right\}$; f) $S=\{4\}$. **8.** a) $S=\left\{-1;\ -\frac{3}{4}\right\}$; b) $S=\left\{-3\frac{1}{8};\ 3\right\}$; c) $S=\{-8;\ 7\}$; d) $S=\left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$; e) $S=\{-7;\ 8\}$; f) $S=\left\{-1;\ 4\frac{2}{3}\right\}$. **9.** a) $x\in\{\pm2{,}5\}$; b) $x\in\varnothing$; c) $x\in\{0;\ 1\}$; d) $x\in\{1\pm\sqrt{2}\}$. **10.** a) $x_1+x_2=2,\ x_1\cdot x_2=-9$; b) $x_1+x_2=1,\ x_1\cdot x_2=-12$; c) $x_1+x_2=\frac{5}{3},\ x_1\cdot x_2=\frac{2}{3}$; d) $x_1+x_2=\frac{5}{2},\ x_1\cdot x_2=-5$. **11.** a) $x=5$; b) $x\in\{2;\ 4\}$; c) $x\in\{\pm1\}$. **12.** a) $x\in\{-5;\ -3\}$; b) $t=2$; c) $z\in\{-1;\ 23\}$. **13.** 16, 17 şi 18; –18, –17 şi –16. **15.** a) $S=\{-1;\ 23\}$; c) $S=\{-10;\ 8\}$; d) $S=\left\{\frac{10\pm\sqrt{2}}{7}\right\}$; e) $S=\left\{-1;\ 2\frac{7}{15}\right\}$; f) $S=\{2\pm0{,}4\sqrt{30}\}$. **16.** a) $b=-8,\ S=\{-1;\ 5\}$; b) $b=14,\ S=\left\{-1\frac{11}{13};\ 3\right\}$.

§5. **2.** a) 64; b) 64; c) –56; d) –56. **3.** a) $S=\{1;\ 2\}$; b) $S=\{-1;\ -2\}$; c) $S=\left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2};\ \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$; d) $S=\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right\}$. **4.** a) $S=\{-8;\ 5\}$; b) $S=\{-6;\ 8\}$; c) $S=\{-11;\ -8\}$. **5.** a) $x_1+x_2=-9,\ x_1\cdot x_2=20$; b) $x_1+x_2=16,\ x_1\cdot x_2=63$; c) $x_1+x_2=1,\ x_1\cdot x_2=56$. **6.** a) Ambele soluții sunt pozitive; b) o soluție este pozitivă, iar cealaltă – negativă; c) ambele soluții sunt negative. **7.** a) $x_2=-7,\ p=2$. **8.** $x_2=5{,}3,\ c=106$. **9.** a) $S=\{3\pm\sqrt{3}\}$; b) $S=\{-1\pm\sqrt{5}\}$. **10.** $c=-8$.

§6. **1.** a) $x_1=1,\ x_2=5$; b) $x_1=-1$; c) $t_1=-9,\ t_2=1$; d) $z_1=-1,\ z_2=14$. **2.** a) $x_1+x_2=3,\ x_1\cdot x_2=-4$; b) $x_1+x_2=-3,\ x_1\cdot x_2=-4$; c) $x_1+x_2=-6,\ x_1\cdot x_2=5$; d) $x_1+x_2=4,\ x_1\cdot x_2=3$. **3.** a) $x_1+x_2=5,\ x_1\cdot x_2=-10$; b) $x_1+x_2=-11,\ x_1\cdot x_2=-12$; c) $t_1+t_2=-\sqrt{3},\ t_1\cdot t_2=-30$; d) $z_1+z_2=36,\ z_1\cdot z_2=320$. **4.** a) $x_1=7,\ x_2=9$; b) $x_1=-8,\ x_2=6$; c) $t_1=-7,\ t_2=8$; d) $z_1=4,\ z_2=5$. **6.** a) $x_1+x_2=4{,}5,\ x_1\cdot x_2=-5$; b) $x_1+x_2=-\frac{12}{5},\ x_1\cdot x_2=\frac{7}{5}$. **7.** c) $S=\left\{0,\ \frac{12}{7}\right\}$; d) $S=\{\pm4\}$. **9.** b) $S=\varnothing$. **11.** $x_2=-7,\ p=-1$. **12.** $t_2=-3,\ c=-165$. **13.** $c=-12$. **14.** $m=-13$. **15.** a) $S=\{-1\}$; b) $S=\{7\}$. **17.** a) $t_1=\sqrt{5},\ t_2=3$; b) $t_1=-3,\ t_2=n^2$. **18.** $a=-1$ sau $a=6$. **19.** $a=-1$ sau $a=3$.

§7. **2.** a) x^2+3x+2; b) $6x^2-6x-72$; c) $2t^2-11t+5$; d) $z^2+1{,}5z-1$. **3.** b) $5(2x-1)(2x+1)$; d) $(2x+5)(x-3)$; e) $-8(x-1{,}5)(x+1)$. **4.** a) $(x-2)(3x+7)$; b) $(4-x)(x+1)$; c) $6(3x+7)(x-2)$; f) $(z-2)(3z+10)$. **5.** a) –5; b) –12. **6.** a) 5; b) 9. **8.** $c\in(-\infty;\ 4]$. **9.** $c\in\left\{-3;\ 1\frac{4}{9}\right\}$.

§8. **1.** 8 şi 12; –12 şi –8. **2.** 26 de rânduri **3.** $S=\{-1\}$. **4.** $A\cap B=\{1\}$. **5.** 1 şi 3; –3 şi –1. **6.** a) 12 m; b) 780 lei; c) 0,48 kg. **7.** 150 cm². **8.** a) $\frac{1}{25}$; b) $-\frac{216}{125}$; c) $\frac{61}{25}$; d) $\frac{121}{25}$. **9.** $c=9$. **11.** a) 90 m; b) 108 kg; c) 680,4 lei. **12.** 5 şi 15. **13.** a) 36 m şi 50 m; b) 172 m. **14.** 12 m şi 4 m. **15.** 7 şi 8; –8 şi –7. **16.** 11 şahişti. **17.** *Indicație:* Se va utiliza substituția $|x|=t$.

Exerciții și probleme recapitulative

6. a) 64; b) 4; c) 1; d) 49. **7.** a) $S=\{-3;\ 4\}$; b) $S\in\varnothing$; c) $S\in\varnothing$. **8.** a) $S=\{\pm7\}$; b) $S=\{\pm10\}$; c) $S=\left\{-\frac{3}{8};\ 0\right\}$; d) $S\in\varnothing$. **9.** a) $S=\{1;\ 9\}$; b) $S=\{-3;\ 1\}$; c) $S=\{1;\ 7\}$; d) $S=\{-2;\ -0{,}4\}$. **10.** a) $S=\{-7;\ 1\}$; b) $S=\{2;\ 5\}$. **13.** a) $S=\left\{-2;\ \frac{3}{2}\right\}$; b) $S=\left\{-2;\ \frac{2}{3}\right\}$; c) $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$. **15.** a) $S=\{-2;\ 2\}$; b) $S=\{0;\ 2{,}5\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\{0\}$. **16.** a) $\Delta=121$, $S=\{-2;\ 9\}$; b) $\Delta=1$, $S=\left\{\frac{2}{3};1\right\}$; c) $\Delta=1$, $S=\left\{1\frac{2}{3};\ 2\right\}$; d) $\Delta=0$, $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **18.** 12, 13 şi 14. **19.** 1 sau 9. **20.** a) $x=3$; b) $x=10$. **23.** a) $x\approx-0{,}2$ sau $x\approx6{,}2$; b) $x\approx-3{,}7$ sau $x\approx-0{,}3$; c) $x\approx-0{,}7$ sau $x\approx2{,}7$. **24.** a) $S=\left\{\frac{2}{3};4\right\}$; b) $S=\{-1;\ 2\}$; c) $S=\left\{-4\frac{1}{4};0\right\}$; d) $S=\left\{\frac{-8-\sqrt{73}}{3};\ \frac{-8+\sqrt{73}}{3}\right\}$; e) $S=\left\{\frac{1}{6};1\right\}$; f) $S=\{10-4\sqrt{10};10+4\sqrt{10}\}$. **27.** a) $(x-7)(x-3)$; b) $(2x-3)(3x-1)$; c) $(x+3)(3x-2)$; d) $(-2x-1)(x-2)$. **28.** 50 cm. **29.** 21 de elevi. **30.** 1 s şi 3 s. **31.** 30 u.l. **34.** a) $-1{,}006$; b) $-\frac{100}{103}$. **37.** a) $S=\{-1;\ 1\}$; b) $S=\{-1;\ 1\}$; c) $S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; d) $S=\left\{-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};\sqrt{3}\right\}$. **38.** a) $m=2,\ x_2=3$; b) $m=-27,\ x_2=-\frac{9}{2}$. **39.** a) $m=\pm6$; b) $m=0,\ m=\frac{4}{9}$; c) $m=\frac{1}{2}$; d) $m=20\pm6\sqrt{5}$. **41.** a) $S=\{-1\}$; b) $S=\{-3;\ 3\}$; c) $S=\{-5;\ 5\}$; d) $S=\{-3\sqrt{7};\ 7\}$. **42.** a) 169; b) $\frac{13}{14}$; c) 141; d) 113. **43.** a) $a=-12$; b) $a=3$. **44.** 10 echipe. **45.** a) $a\in\left(3\frac{1}{8};+\infty\right)$; b) $a\in\left\{-\frac{1}{7};\ 0;\ 1\right\}$.

Geometrie

Capitolul 1. Recapitulare și completări

§1. **4.** a) 24 dm = 240 cm; b) 890 mm = 8,9 dm; c) 7,5 m = 750 cm; d) 64900 cm = 0,649 km. **9.** 44°, 136°, 136°. **10.** a) 90°, 90°; b) 40°, 50°; c) 18°, 162°; d) 50°, 50°. **11.** a) $2\frac{1}{3}$; b) $\frac{4}{7}$. **12.** a) $\beta=155°$. **13.** a) Da; b) nu; c) da. **15.** a) 62 cm; b) $24\sqrt{5}$ cm. **16.** a) 2; b) 1; c) 0; d) 0. **18.** a) $\alpha=54°$; b) $\alpha=55°30'$. **19.** 20°, 40°, 120°. **28.** a) $PM=12$ cm, $PN=15$ cm. **30.** a) 20π cm; b) 10π cm; c) 24π cm; d) 4π cm. **31.** De 10 ori. **32.** Se construiesc cercul circumscris triunghiului şi laturile RT, TS ale triunghiului RTS. **34.** Triunghiul isoscel ABC are baza BC. 1) Dacă $\angle B$ are 60°, atunci $m(\angle C)=60°$ şi $m(\angle A)=60°$. 2) Dacă $\angle A$ are 60°, atunci în $m(\angle B)=m(\angle C)=(180°-60°):2=60°$. Aşadar, un triunghi isoscel cu un unghi de 60° este triunghi echilateral. Reciproc, dacă ABC este echilateral, atunci este un triunghi isoscel cu un unghi de 60°. **35.** $18\sqrt{3}$ cm. **36.** a) 60°, 60°, 120°, 120°; b) 6 unghiuri de 60°. **37.** 36 cm². **38.** 80 cm. **40.** 15 cm.

§2. **2.** a) F; b) A; c) A; d) F. **7.** a) De exemplu, $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$, $\sqrt{27}\notin\mathbb{Q}$, însă $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=9\in\mathbb{Q}$. **15.** Adevăr. **16.** *Această pagină conține exact nouă propoziții false*. **17.** *Numele tău este Adi?* **18.** 18 m.

Capitolul 2. Patrulatere. Poligoane

§1. **3.** a) 2; b) 3; c) 4; d) 7. **4.** a) 720; b) 900°; c) 1080°; d) 1440°. **5.** a) 27,(4) cm; b) $35\sqrt{3}$ cm. **6.** a) 120°, 80°; b) 70°, 90°. **7.** a) 90° fiecare; b) 108° fiecare; c) 120° fiecare; d) 144° fiecare. **8.** Paralele **9.** 11 cm, 12 cm, 13 cm, 14 cm. **10.** a) Da; b) nu; c) nu. **11.** a) 48°, 72°, 96°, 144°; b) 40°, 60°, 120°, 140°; c) 60°, 80°, 100°, 120°. **12.** a) 162°, 108°, 54°, 36°; b) 180°, 90°, 60°, 30°. **13.** a) 5; b) 9; c) 14; d) 35.

§2. **2.** a) 16 cm; b) $30\sqrt{5}$ cm. **3.** a) 32,8 cm; b) 30,(6) cm. **5.** a) Adevărat; b) Adevărat; c) Fals; d) Fals. **6.** 35°, 145°, 145°. **7.** 30°, 30°, 150°, 150°. **8.** 80°, 80°, 100°, 100°. **9.** 5 cm. **10.** 6 cm. **11.** 22 cm, 24 cm, 26 cm, 28 cm. **12.** 90 cm. **13.** 4,5 cm.

14. 15 cm, 20 cm. **15.** 48 cm^2. **16.** a) $D(6;-2)$; b) $D(5;-8)$; c) $D(1;-4)$.

§3. **2.** a) 90°, 90°, 70°, 110; b) 90°, 90°, 40°, 140°. **3.** a) 80°, 80°, 100°, 100°; b) 110°, 110, 70°, 70°. **4.** a) 6 cm; b) $4\sqrt{7}$ cm; c) 7,8(3) cm. **5.** a) 14 cm; b) 10 cm. **6.** 20 cm, 20 cm, 20 cm, 40 cm. **7.** a) 64 cm; b) 74 cm. **8.** a) 41 cm; b) $7\sqrt{5}$ cm. **9.** 20 cm. **10.** 12 cm şi 18 cm. **11.** 51 cm. **12.** 60°, 60°, 120°, 120°. **14.** 14 cm.

§4. **3.** a) $a \approx 128°34'$; b) 140°; c) 144°. **5.** a) 8; b) 5; c) 6. **6.** a) 6; b) 5; c) 11. **7.** a) Hexagon regulat; b) octogon regulat; c) pentagon regulat. **8.** 11 cm. **9.** a) 30°; b) 60°; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) 2.

Exerciții și probleme recapitulative

2. a) 5; b) 6; c) 9; d) 15. **3.** a) 9; b) 12; c) 20; d) 17. **4.** a) 105°; b) 80°. **7.** a) $4\sqrt{2}$ cm; b) 80 cm^2. **8.** $A_2B_2 = 14$ cm, $A_3B_3 = 17$ cm. **9.** a) $A(-4;-6)$; $B(-3;2)$; b) $C(-1;-1)$; $D(-5;1)$. **10.** 96 cm^2. **11.** 60 cm^2. **12.** a) 50 cm^2; b) 48 cm^2. **13.** a) 360°; b) 360°; c) 360°. **14.** Paralelogram.

Capitolul 3. Asemănarea triunghiurilor

§1. **1.** a) Nu; b) da; c) nu; d) da. **2.** a) Da; b) da.

3. a)

4	6	10	12	9
12	18	30	36	27

; b)

0,2	1	1,8	2	3,2	2,4
1	5	9	10	16	12

. **6.** a) $\frac{AB}{CD} = 0,(5)$; b) $\frac{AC}{AD} = \frac{4}{7}$; c) $\frac{BC}{BD} = 0,4375$; d) $\frac{AD}{AB} = 4,2$.

7. a) 2,(3); b) $\frac{4}{7}$; c) 1,75; d) 0,3. **8.** a) 9,6 cm; b) 5 cm; c) 0,(3). **10.** $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$. **11.** $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$. **12.** a) $C(4;3)$, $D(7;5)$; b) $O(0;0)$, $C(3;-1)$. **13.** a) Nu; b) da. **14.** a) 3,04; b) 6,4; c) 2,88. **16.** a) $AC = BD = 1,25$ cm, $CD = 2,5$ cm; b) $AC = CD = BD = 2,(6)$ cm. **17.** a) 4,5; b) 9,3.

§2. **2.** a) $\Delta ABC \sim \Delta CDE$; b) $\Delta ABC \sim \Delta EDC$. **3.** a) $\Delta AFE \sim \Delta DFB$; b) $\Delta ABF \sim \Delta DEF$, $\Delta BCD \sim \Delta BED$. **4.** a) $m(\angle A) = 55°$, $m(\angle C) = 35°$; b) $m(\angle A) = m(\angle B) = 70°$, $m(\angle C) = 40°$; c) $m(\angle A) = m(\angle B) = m(\angle C) = 60°$. **5.** a) Adevărat; b) Fals; c) Adevărat. **6.** a) 33 cm; b) $\sqrt{5}$. **7.** $\Delta AOD \sim \Delta COB$. **8.** $\Delta BMC \sim \Delta ENF$, $\Delta AMB \sim \Delta DNE$. **9.** $\Delta ABC \sim \Delta EDC \sim \Delta DBA \sim \Delta EAD$. **10.** a) 4; b) 7. **11.** a) 67,5 m; b) 80 m. **12.** 12 cm, 16 cm, 24 cm. **13.** a) 10; b) 8. **14.** a) $\Delta AEF \sim \Delta CBD$; b) $\Delta ABC \sim \Delta DFE$; c) $\Delta ADE \sim \Delta BCF$.

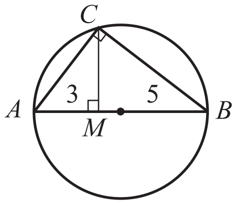
Exerciții și probleme recapitulative

3. $MM_1 = 10$ cm, $NN_1 = 20$ cm, $KK_1 = 30$ cm. **4.** a) O soluție este 4 cm; b) o soluție este 6 cm. **5.** $k = 3$. **6.** $m(\angle BAK) = 30°$, $m(\angle AKB) = 74°$. **7.** 15 cm. **8.** 10 cm. **9.** $k = 2$ sau $k = \frac{1}{2}$. **11.** 4 cm. **12.** 4 cm, 6 cm, 9 cm şi 6 cm, 9 cm, 13,5 cm. **13.** De 9 ori. **14.** 120°.

Capitolul 4. Relații metrice în triunghiul dreptunghic

§1. **2.** a) 6 cm; b) 12 cm; c) $6\sqrt{5}$ cm. **3.** a) 12 cm; b) 8 cm; c) 12,5 cm. **4.** a) $6\sqrt{5}$ cm şi $12\sqrt{5}$ cm; b) $4\sqrt{21}$ cm şi $8\sqrt{7}$ cm; c) 3 cm şi $3\sqrt{2}$ cm. **5.** 50 cm şi 72 cm. **6.** 18 cm şi 98 cm.

7. a) *Indicație.*



ΔABC – dreptunghic,
$AM = 3$ cm,
$MB = 5$ cm,
$CM = \sqrt{15}$ cm.

10. $5\sqrt{2}$ cm. **11.** 12 cm. **12.** 8 cm. **13.** a) 4,5 cm; b) 4,5 cm. **14.** $6\sqrt{5}$ cm, $12\sqrt{5}$ cm.

§2. **1.** a) 26 cm; b) 25 cm; c) 8 cm; d) 6 cm. **2.** 34 cm. **3.** $\sqrt{7}$ cm. **4.** 20 cm. **5.** a) $5\sqrt{58}$ cm; b) 74 cm. **6.** a) $5\sqrt{3}$ cm; b) 18 cm. **7.** a) 13; b) $\sqrt{10}$; c) $6\sqrt{5}$; d) $5\sqrt{5}$. **8.** a) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm; b) 2 cm. **9.** a) Da; b) nu; c) da; d) da. **10.** 208 cm. **11.** 34 cm. **12.** $\sqrt{7}$ cm. **13.** 50 cm. **15.** 40 cm.

§3. **1.** a) $\sin\alpha = 0,8$, $\cos\alpha = 0,6$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4}{3}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{3}{4}$; b) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{5}{12}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = 2,4$; c) $\sin\alpha = \frac{10}{\sqrt{149}}$,

$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{149}}$, $\text{tg}\alpha = 1\frac{3}{7}$, $\text{ctg}\alpha = 0{,}7$; d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos\alpha = 0{,}75$, $\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $\text{ctg}\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$. **2.** a) $AC = 13$, $AB = 12$; b) $MK = 14$, $MN = 7\sqrt{3}$; c) $FG = 1{,}8$, $EG = \frac{9\sqrt{26}}{5}$; d) $QR = 8$, $PR = 4\sqrt{13}$. **7.** a) 60°; b) 60°. **9.** a) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$; b) $\frac{\sin A}{\cos A} = \text{tg}A = 0{,}75$, $\frac{\sin C}{\cos C} = \text{tg}C = 1{,}(3)$; c) $\frac{\cos A}{\sin A} = \text{ctg}A = 1{,}(3)$, $\frac{\cos C}{\sin C} = \text{ctg}C = 0{,}75$; d) $\frac{1}{\cos^2 A} = 1 + \text{tg}^2 A = 1{,}5625$, $\frac{1}{\cos^2 C} = 1 + \text{tg}^2 C = 2{,}(7)$; e) $\frac{1}{\sin^2 A} = 1 + \text{ctg}^2 A = 2{,}(7)$, $\frac{1}{\sin^2 C} = 1 + \text{ctg}^2 C = 1{,}5625$. **10.** a) $BC = 20$ cm, $AB = 48$ cm, $AC = 52$ cm; b) $AB = 7{,}2$ cm, $BC = 9{,}6$ cm, $AC = 12$ cm; c) $AB = 12$ cm, $BC = 12{,}6$ cm, $AC = 17{,}4$ cm; d) $AB = 23{,}4$ cm, $BC = 8{,}8$ cm, $AC = 25$ cm. **11.** a) Adevărat; b) Fals; c) Adevărat; d) Adevărat. **15.** a) $\sin M = 0{,}6$, $\cos M = \sin K = 0{,}8$, $\text{tg}M = \text{ctg}K = 0{,}75$, $\text{ctg}M = \text{tg}K = 1{,}(3)$; b) $\cos M = \sin K = \frac{12}{13}$, $\text{tg}M = \text{ctg}K = \frac{5}{12}$, $\text{ctg}M = \text{tg}K = 2{,}4$, $\cos K = \frac{5}{13}$; c) $\sin M = \cos K = \frac{5}{13}$, $\cos M = \sin K = \frac{12}{13}$, $\text{tg}M = \text{ctg}K = \frac{5}{12}$, $\text{ctg}M = 2{,}4$; d) $\sin M = \cos M = \sin K = \cos K = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{tg}M = \text{tg}K = \text{ctg}K = 1$. **16.** a) $\sin 71° \approx 0{,}95$; b) $\cos 36° \approx 0{,}80$; c) $\text{tg}\,65° \approx 2{,}14$; d) $\text{ctg}\,50° \approx 0{,}84$. **17.** 1.

Exerciții și probleme recapitulative

1. a) F; b) D; c) $[AF]$; d) $[CD]$. **2.** a) 36 cm; b) 42 cm. **3.** a) $8\sqrt{13}$ cm și $12\sqrt{13}$ cm; b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm și 0,75 cm. **4.** 10 cm și 24 cm. **5.** 5 cm și 6 cm. **6.** $9\sqrt{3}$ cm. **7.** a) $9\sqrt{3}$ m; b) $6\sqrt{5}$ m. **8.** $3\sqrt{3}$ cm. **9.** $6\sqrt{3}$. **10.** a) 20 cm; b) 14 cm. **11.** 15 cm. **12.** $\frac{9\sqrt{11}}{5}$ cm. **13.** $2\sqrt{5}$ cm și $4\sqrt{5}$ cm. **14.** $BD = 4\sqrt{5}$ cm, $DC = 2\sqrt{29}$ cm. **15.** 12. **16.** Cazul 1: 30 cm, $30\sqrt{3}$ cm; cazul 2: $60 + 30\sqrt{3}$ cm și $90 + 60\sqrt{3}$ cm; cazul 3: $60 - 30\sqrt{3}$ cm și $90 - 60\sqrt{3}$ cm. **17.** 20.

Capitolul 5. Vectori în plan

§1. **1.** a) $A_1(-2;\ 7)$, $B_1(-5;\ 10)$, $C_1(1;\ -1)$; b) $A_1(-1;\ 14)$, $B_1(-6;\ 12)$, $C_1(-11;\ 0)$; c) $A_1(-3;\ 9)$, $B_1(1;\ -4)$, $C_1(-14;\ 12)$. **3.** a) $x_1 = x + 3$, $y_1 = y - 3$; b) $x_1 = x - 5$, $y_1 = y + 4$; c) $x_1 = x + 1$, $y_1 = y - 6$. **4.** a) $M_1(-2;\ 7)$; b) $N_1(1;\ 4)$; c) $K_1(-2;\ 2)$; d) $P_1(-6;\ 10)$. **5.** a) $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{PE}$, $\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{KC}$; b) $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{PD}$; c) $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{EC}$; d) $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{EB}$. **8.** a) $(3;\ 4)$; b) $(5;\ 12)$; c) $(11;\ 60)$; d) $(35;\ 12)$. **9.** a) 5; b) 13; c) 61; d) 37. **10.** a) 13; b) 17; c) 25; d) 41. **11.** a) $A(-2;\ 9)$, $B(1;\ 8)$, $C(-3;\ 8)$; b) $A(1;\ 17)$, $B(6;\ 3)$, $C(4;\ 7)$; c) $A(-2;\ 4)$, $B(1;\ 15)$, $C(-11;\ 13)$. **12.** a) Există; b) nu există; c) există. **13.** a) $C(-2;\ 4)$; b) $C(2;\ -2)$; c) $C(4;\ -4)$. **14.** a) $m = 5$, $n = 3$; b) $m = -3$, $n = -2$; c) $m = 2$, $n = 11$. **15.** a) $(8;\ 8\sqrt{3})$; b) $(8\sqrt{3};\ 8)$; c) $(8\sqrt{2};\ 8\sqrt{2})$. **16.** a) $x_1 = x + a$, $y_1 = y - 2$, unde $a \in \mathbb{R}$; b) $x_1 = x - 6$, $y_1 = y + a$, unde $a \in \mathbb{R}$. **17.** a) $D(3;\ 4)$; b) $D(9;\ 7)$; c) $D(-15;\ -7)$. **18.** *Indicație*. Se demonstrează că $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$.

§2. **1.** a) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$; c) $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DA}$, $\vec{0}$. **2.** a) $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AO}$; b) $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OD}$; c) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$. **3.** a) $(-2{,}2;\ -6 + \sqrt{5})$; b) $(3{,}8;\ -6 - \sqrt{5})$; c) $(-6;\ 2\sqrt{5})$; d) $(0{,}4;\ -3)$; e) $(-10{,}6;\ 3\sqrt{5} + 12)$. **4.** a) $\left(12\frac{2}{3};\ 7\right)$ b) $\left(11\frac{1}{3};\ 25\right)$ c) $(3;\ 4)$; d) $(2;\ -27)$; e) $(28;\ -22)$. **5.** a) $\sqrt{34}$; b) $\sqrt{41}$; c) $\sqrt{117}$; d) $7\sqrt{5}$. **9.** a) 5; b) 4; c) 9; d) 0. **10.** a) -3; b) 24; c) -9; d) -3. **11.** a) $\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{CD}$; c) $\overrightarrow{DA}$. **12.** $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$. **13.** a) $(8;\ -1)$; b) $(-5;\ -2)$; c) $(-4;\ 5)$; d) $(7;\ 18)$. **14.** a) Da; b) nu; c) da; d) da. **15.** 9. **16.** *Indicație*. Arătați că direcțiile vectorilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{CD}$ sunt perpendiculare. **23.** a) $\vec{x}(1;\ 2)$, $\vec{y}(-3;\ 4)$; b) $\vec{x}(2;\ 3)$, $\vec{y}(5;\ -4)$; c) $\vec{x}(0;\ -1)$, $\vec{y}(6;\ -2)$. **25.** $2AB^2 + 2AD^2 = AC^2 + BD^2$.

Exerciții și probleme recapitulative

4. a) 5; b) 6; c) 5; d) $2\sqrt{5}$. **6.** $D(3;\ 1)$. **7.** a) $\sqrt{2}$; b) 26; c) 15; d) 82. **9.** a) $A_1(4;\ 2)$; b) $B_1(3;\ 7)$; c) $C_1(-1;\ 5)$; d) $D_1(4;\ -4)$. **15.** a) 24; b) 7,5; c) 12; d) 6. **19.** a) $\frac{2}{3}$; b) 0; c) 7,5. **20.** b) 12. **21.** $C(2;\ 0)$. **22.** a) Isoscel; b) echilateral. **23.** a) Dreptunghi; b) paralelogram.

Cuprins

Manual

CLASA 8